数学的思考力を高める創造的教材の探究（その5）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
熊倉啓之・駒野　誠・鈴木清夫

数学的思考力を高める創造的教材の探求（その5）

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉啓之　駒野　誠　鈴木清夫

授業中での生徒の質問の中に，面白い数学が潜んでいることがある。教師が授業の準備をする際に生ずる素朴な疑問の中に，興味深い数学を見い出すことがある。それらをきっかけとして，生徒が興味・関心を持って取り組み，数学的思考力を高めるような教材を開発することが本研究のねらいである。今年度は，「適当な四角形を底面とする四角錐の展開図は，どのように作ればよいか？」，「空間図形のとんがり度を定義し，いろいろな図形のとんがり度の和を調べてみよう」，「三角定規を，2本のピンに当てながら動かすとき，頂点や辺の動きを調べてみよう」の3教材について考察し，授業での活用を検討した。
キーワード：教材開発，数学的思考力，四角錐，とんがり度，辺の軌跡

1．研究の目的

授業中での生徒の質問の中に，面白い数学が潜んでいることがある。教師が授業の準備をする際に生ずる素朴な疑問の中に,興味深い数学を見出すことがある。しかし，日常の忙しさの中で，それらの質問や疑問は忘れてしまうことも多い。

そこで上記のことも含めて，数学の教材について，グループ(教材探検の会)で情報交換を行い，それぞれについて検討することを目的に,1994年度より活動を始めた。

長年，同じ内容の授業を繰り返し行って感じることは，いかなる教材を用いるかによって，生徒の興味・関心は異なり，また，内容に関する理解度や定着度も異なることである。一方ではまた，同じ教材を用いても，生徒への提示の仕方によって，興味・関心が異なることもある。

それだけに，適切な教材を適切な方法で提示することは，よい授業を構成する上で重要な要素の1つであろう。そのような教材はすでに数多く知られているが，まだ必ずしも十分ではないし，またすぐれた教材やその指導法は，いくつあっても多過ぎることはないであろう。

以上を踏まえて，(少なくとも我々にとって)新しいもので，多種多様な教材およびその提示の仕方を開発していこうというのが，本研究のねらいである。

また本研究を通して，我々教師自身も，数学により一層興味・関心を持ち，理解を深めることも，もう一つのねらいである。

2．研究の方法

教材は，たとえば次のようなものを取り上げる。

- 中学，高校の生徒が興味・関心をもつ教材
- 中学，高校の生徒が，理解できる教材
- 発展，特殊化，一般化できるような教材
- 次の段階(高校，大学)へつながるような教材
- 数学的なよさ・美しさがわかる教材
- 数学的な考え方を必要とする教材
- 操作・活動を伴う教材
- コンピュータ等の教具を活用する教材　など

取り扱う範囲は，必ずしも現行カリキュラムにとらわれることなく，自由に検討する。

教材の検討に際しては，発展・特殊化・一般化を考えたり，場面設定や表現など，生徒が取り組み易い形を検討する。また，提示の仕方についてもあわせて検討する。

3．研究の経過

これまでに16教材について検討し報告した[1][2][3]。これらのうち，12教材についてはさらに検討を加え，出版物としてまとめた[4]。また1教材については，日本数学学会誌で報告した[5]。

4．本年度の研究

本年度は，次の3教材について検討した。以下，それぞれの検討結果を報告する。

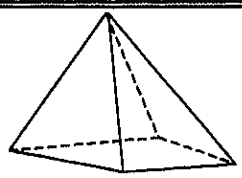
4.1　適当な四角錐をつくる
4.2　図形のとんがり度数を考える
4.3　三角定規を動かそう

Research and Development of New Materials to Enhance Creative Thinking in Mathematics (5th series)

4.1 適当な四角錐をつくる

4.1.1. 課題

適当な四角形を底面に持つ四角錐をつくってみよう。



4.1.2. 課題展開例

【課題1】適当な△ABC を底面に持つ三角錐をつくってみよう。

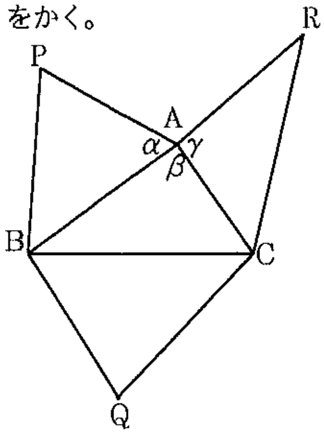
次の2つの条件をみたすように，展開図を作ればよい。

（条件1） 隣り合う辺の長さが等しい。

（条件2） 頂点に集まる角の関係$\beta<\alpha+\gamma$をみたす。

条件1は，次のような手順で作図する。

① 点Pを適当にとって，△APB をかく。
② QB=PB となるような適当な点 Q をとって，△QBC をかく。
③ RC=QC，RA=PA となるような点 R をとって，△RAC をかく。



条件2から，一般の多面体において，1 つの頂点に集まる3つの面の角α，β，γについて，

$$\alpha<\beta+\gamma,\ \beta<\gamma+\alpha,\ \gamma<\alpha+\beta$$

が成り立つことがわかる。

さらには，1 つの頂点に集まる n 個の面の角について，

1つの面の角＜他の面の角の和

も成り立つ。

【課題2】適当な四角形 ABCD を底面に持つ四角錐をつくってみよう。[6]

次の3つの条件をみたすように，展開図を作ればよい。

（条件1） 隣り合う辺の長さが等しい。

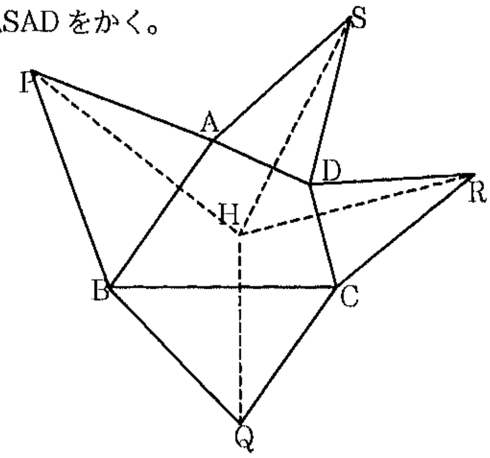
（条件2） 頂点に集まる角の関係をみたす。

（条件3） 錐の頂点から底面の四角形の各辺にひいた垂線が1点で交わる。

条件1，条件2だけで展開図を作図しても，四角錐は必ずしもできない。

条件2，条件3をみたすような作図はたとえば次のように行う。

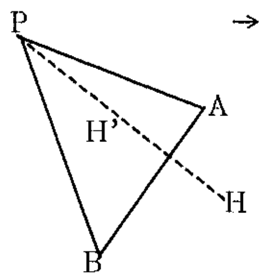
① 点Pを適当にとって，△APB をかく。
② QB=PB となるような適当な点 Q をとって，△QBC をかく。
P，Q から AB，BC にひいた垂線の交点を H とするとき，
③ RC=QC,RH⊥CD となるような点Rをとって，△RCD をかく。
④ SD=RD，SA=PA となるような点 S をとって，△SAD をかく。



このとき，SH⊥AD となる。 → <証明1>

条件2をみたす作図は，AB に関して H と対称な点を H’ とするとき，PH>HH’ となるように，P をとればよい。Q，R，S についても同様である。

→ <証明2>



【課題3】課題1では，条件3に相当する条件は不要なのか？

（条件3） 錐の頂点から底面の三角形の各辺にひいた垂線が1点で交わる。

条件1が成り立つならば，必ず条件3も成り立つ。

→ <証明3>

＜証明１＞

$PB=QB,\ QC=RC,\ RD=SD,\ SA=PA$

$PH\perp AB,\ QH\perp BC,\ RH\perp CD$

$\Rightarrow\ SH\perp AD$

証明）

$PH\perp AB$ より，$PA^2-PB^2=HA^2-HB^2$ …①

$QH\perp BC$ より，$QB^2-QC^2=HB^2-HC^2$ …②

$RH\perp CD$ より，$RC^2-RD^2=HC^2-HD^2$ …③

$PB=QB$ だから，①+②より，

$PA^2-QC^2=HA^2-HC^2$ …④

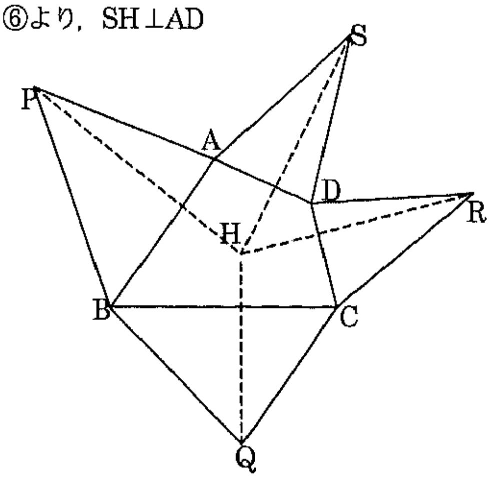
$QC=RC$ だから，③+④より，

$PA^2-RD^2=HA^2-HD^2$ …⑤

$RD=SD,\ SA=PA$ だから，⑤より，

$SA^2-SD^2=HA^2-HD^2$ …⑥

⑥より，$SH\perp AD$



（補足）

一般に，$AB\perp CD \Leftrightarrow AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$

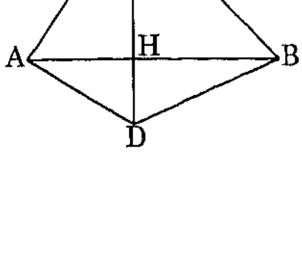
∵）$AH^2=AC^2-CH^2=AD^2-DH^2$ だから，

$AC^2-AD^2=CH^2-DH^2$

同様にして，$BC^2-BD^2=CH^2-DH^2$

よって，$AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$

逆も同様に示される。



＜証明２＞

$PH>HH',\ SH>HH''$ だから，

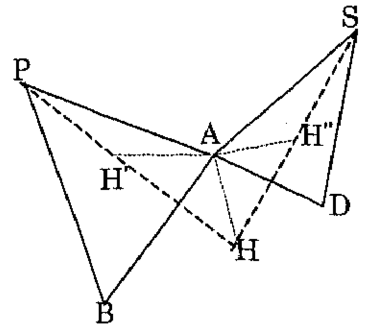
$\angle BAP>\angle BAH',\ \angle DAS>\angle DAH''$

よって，$\angle BAD=\angle BAH+\angle DAH$

$=\angle BAH'+\angle DAH''$

$<\angle BAP+\angle DAS$

他も同様である。



＜証明３＞

$PB=QB,\ QC=RC,\ RA=PA$

$PH\perp AB,\ QH\perp BC\ \Rightarrow\ RH\perp CA$

証明）　$PH\perp AB,\ QH\perp BC$ だから，

$PA^2-PB^2=HA^2-HB^2$ …①

$QB^2-QC^2=HB^2-HC^2$ …②

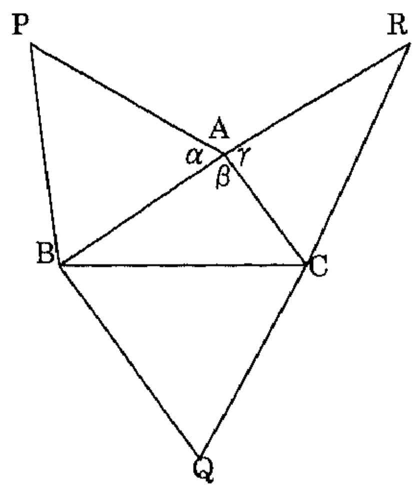
$PB=QB$ だから，①+②より，

$PA^2-QC^2=HA^2-HC^2$ …③

$QC=RC,\ RA=PA$ だから，③より，

$RA^2-RC^2=HA^2-HC^2$ …④

④より，$RH\perp CA$



4.1.3.授業での扱い

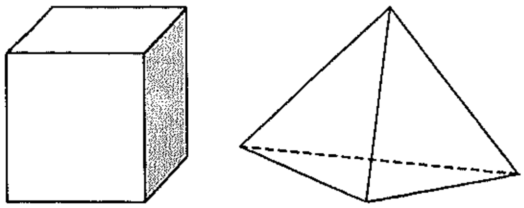
中学３年・課題学習(空間図形)

高校数学Ａ「平面幾何」，数学基礎　等

4.2　とんがり度数を考える

4.2.1　課題

立体図形の各頂点のとんがり度数を考えよう。
また，いろいろな立体図形のとんがり度数の和を求めてみよう。



4.2.2.　課題展開例

【課題１】平面図形で，とんがり度数を定義してみよう。

次の条件をみたすような「とんがり度数」を考える。
（条件１）　とんがっているほど，数値が大きい。
（条件２）　０以上１以下の数値で表される。

$$\text{とんがり度数} = 1 - \frac{\text{頂角}}{180^\circ} = \frac{180^\circ - \text{頂角}}{180^\circ}$$

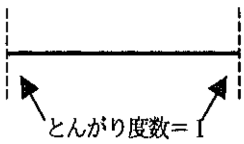
で定義する。

【課題２】平面図形で，とんがり度数の和を求めよう。

上で定義したとんがり度数は，180－頂角＝外角だから，実は $\frac{\text{外角}}{180^\circ}$ に一致する。

どのような平面図形も外角の和は，360°で一定だから，とんがり度数の和は，　$\frac{360}{180} = 2$　である。

つぶれた平面図形として，線分を考えても，とんがり度数の和は２になることが確認できる。

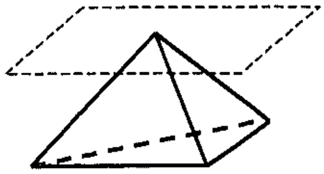


【課題３】空間図形で，とんがり度数を定義してみよう。

次の条件をみたすような「とんがり度数」を考える。
（条件１）　とんがっているほど，数値が大きい。
（条件２）　０以上１以下の数値で表される。

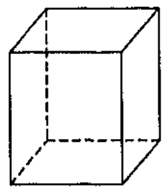
$$\text{とんがり度数} = 1 - \frac{\text{頂点に集まる面角の和}}{360^\circ} = \frac{360^\circ - \text{頂点に集まる面角の和}}{360^\circ}$$

で定義する。



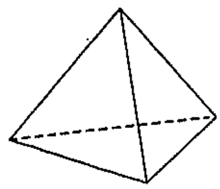
【課題４】いろいろな空間図形の，とんがり度数の和を求めてみよう。[7]

①　直方体の場合



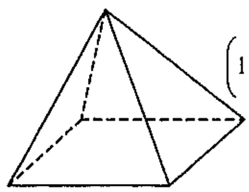
$$\left(1 - \frac{90^\circ \times 3}{360^\circ}\right) \times 8 = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

②　正四面体の場合



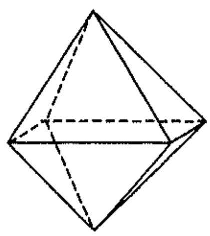
$$\left(1 - \frac{60^\circ \times 3}{360^\circ}\right) \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

③　正四角錐の場合



$$\left(1 - \frac{60^\circ \times 2 + 90^\circ}{360^\circ}\right) \times 4 + \left(1 - \frac{60^\circ \times 4}{360^\circ}\right) = \frac{5}{12} \times 4 + \frac{1}{3} = 2$$

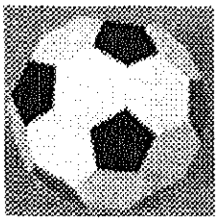
④　正八面体の場合

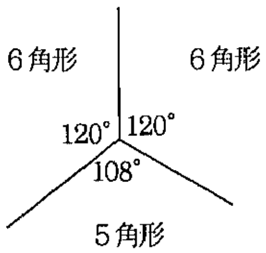


$$\left(1 - \frac{60^\circ \times 4}{360^\circ}\right) \times 6 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

いずれの空間図形のとんがり度数の和も，２となることが確認できる。
（なぜ，いかなる空間図形のとんがり度数の和も２になるのか　→　<証明１>）

【課題5】とんがり度数の和が2になることを利用して，サッカーボールの頂点，辺の数を求めてみよう。





各頂点の周りには，6角形2つ，5角形1つが集まっているので，

$$とんがり度数 = 1 - \frac{120°+120°+108°}{360°}$$

$$= \frac{1}{30}$$

とんがり度数の和は2だから，頂点の数は，

$$2 \div \frac{1}{30} = 60 個$$

辺は各頂点から3本ずつ出ているので，その総数は，

$60 \times 3 \div 2 = 90$ 本

<証明1>

多面体の面の数をF，辺の数をE，頂点の数をVとする。

また，P角形がx個，Q角形がy個，R角形がz個，… とする。

このとき，$x+y+z+\cdots=F$ … ①

（360° −頂点に集まる面角の和）の総和Sは，

$$360°\ V-\{(P-2)\times 180°\ \times x+(Q-2)\times 180°\ \times y+(R-2)\times 180°\ \times z+\cdots\}$$

$$=180°\ \{2V-(Px+Qy+Rz+\cdots)+2(x+y+z+\cdots)\}$$

ここで，$Px+Qy+Rz+\cdots=2E$ だから，①と合わせて

$$S=180°\ (2V-2E+2F)=360°\ (V-E+F)$$

オイラーの多面体定理から，$V-E+F=2$ だから，

$$S=720°$$

よって，とんがり度数の和は，$\frac{S}{360°}=2$

4.2.3. 授業での扱い

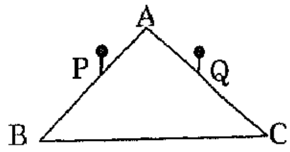
中学3年・課題学習「空間図形」

高校数学基礎　等

4.3 三角定規を動かそう

4.3.1. 課題

三角定規を，図のように2本のピンP,Qに当てながら動かすとき，辺BCによって，どのような図形が描かれるか？



4.3.2. 課題展開例

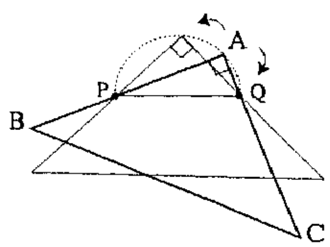
【課題1】△ABC が AB=AC の直角二等辺三角形のとき，頂点Aはどんな図形を描くか？
また，△ABC が AC=BC の直角二等辺三角形のとき，Aはどんな図形を描くか？

｛ 円周角の定理の逆 ｝

AB=AC のとき，頂点Aがどの位置にあっても

$$\angle PAQ = 90°$$

であるから，線分PQを直径とする半円を描く。

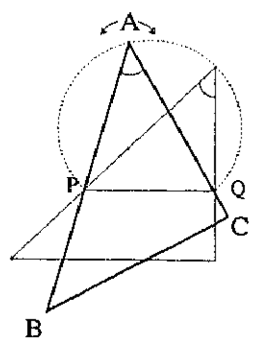


同様に，

AC=BC のとき，頂点Aがどの位置にあっても

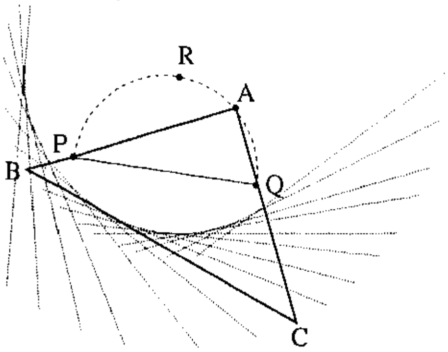
$$\angle PAQ = 45°$$

であるから，線分PQを両端とする円弧を描く。



【課題2】△ABC が AB=AC の直角二等辺三角形のとき，辺 BC によってどのような図形が描かれるか？

① 実験：厚紙にさした２本のピンに三角定規を当ながら動かし，BC をたくさん書いてみよう。

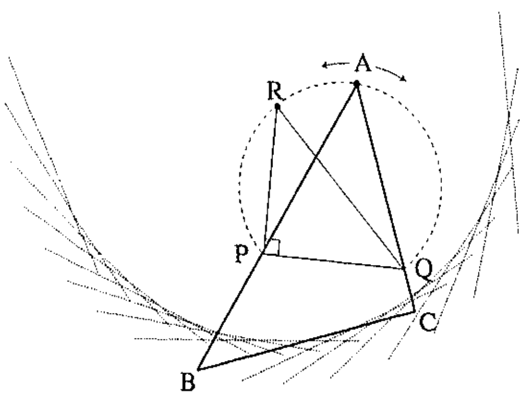


② 予想：辺 BC によって，円が描かれているように見える。その中心は？
→ 頂点 A が描く半円の弧の中点 R
また，半径は？
→ 辺 BC の中点を M とすると，
AM

③ 証明：R から辺 BC へ引いた垂線を RH とすると，
RH=AM（一定）
であることを示せばよい。
→ ＜証明１＞

【課題3】△ABC が AC=BC の直角二等辺三角形のとき，辺 BC によってどのような図形が描かれるか？

① 実験：厚紙にさした２本のピンに三角定規を当ながら動かし，BC をたくさん書いてみよう。

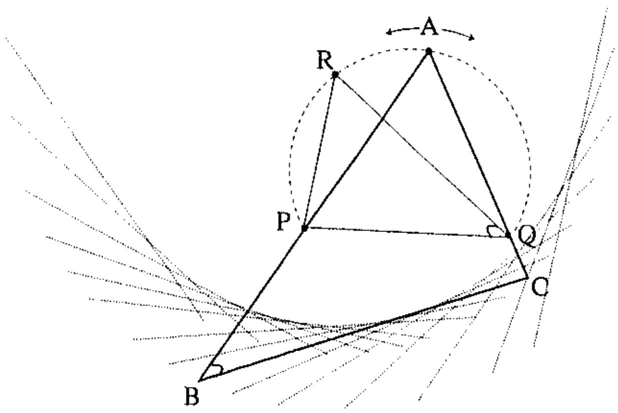


② 予想：辺 BC によって，円が描かれているように見える。その中心は？
→ A が描く円弧上で，
$\angle RPQ = 90°$ である点 R
また，半径は？
→ 辺 AC

③ 証明：R から辺 BC へ引いた垂線を RH とすると，
RH=AC（一定）
であることを示せばよい。
→ ＜証明２＞

【課題4】△ABC が一般の三角形のとき，辺 BC によってどのような図形が描かれるか？

① 実験：厚紙で△ABC を作り，同じように２本のピンに２辺を当ながら動かし，BC をたくさん書いてみよう。



② 予想：辺 BC によって，円が描かれているように見える。その中心は？
→ A が描く円弧上で，
$\angle RQP = \angle ABC$ である点 R
また，半径は？
→ △ABC で A から辺 BC に引いた垂線 AN

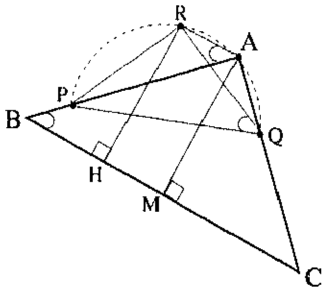
③ 証明：R から辺 BC へ引いた垂線を RH とすると，
RH=AN（一定）
であることを示せばよい。
→ ＜証明３＞

<証明１>

$\angle RAP = \angle RQP = \angle ABC = 45°$

よりARとBCは平行であるから

$RH = AM$

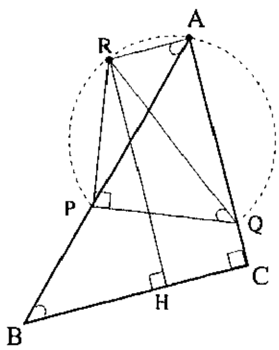


<証明２>

$\angle RAP = \angle RQP = \angle ABC = 45°$

よりARとBCは平行であるから

$RH = AC$

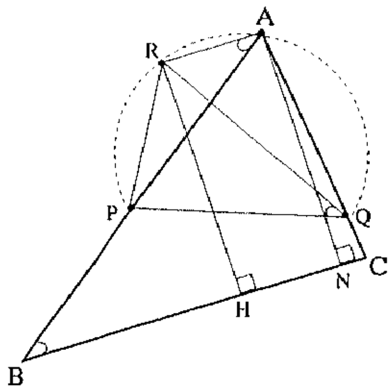


<証明３>

$\angle RAP = \angle RQP = \angle ABC$

よりARとBCは平行であるから

$RH = AN$



4.3.3.授業での扱い

中学３年・課題学習「平面図形」

高校数学Ⅰ「図形と計量」

数学Ａ「平面図形」

高校数学基礎　等

【引用・参考文献】

1)熊倉啓之他(1995)「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その１）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第 35 集』

2)駒野誠他(1996)「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その２）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第 36 集』

3)鈴木清夫他(1996)「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その３）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第 37 集』

4)熊倉啓之・駒野誠・鈴木清夫他(1997)『数学ランド・おもしろ探検』森北出版

5)熊倉啓之他(1997)「三角形の『心』に関する一考察」『日本数学教育学会誌 79－7』

6)平林一栄(1991)『新・中学校数学指導実践例講座 $\boxed{3}$ 図形』金子書房

7)遠山啓(1979)『３次元の世界』ほるぷ出版