

中1→中3→高2にみる数学関連図書の読後感の変遷
—— 中高一貫カリキュラム構成のための一つの視点 ——

中1→中3→高2にみる数学関連図書の読後感の変遷

—— 中高一貫カリキュラム構成のための一つの視点 ——

筑波大学附属駒場中・高等学校

井上正允

義務教育の9年間、児童・生徒は算数・数学を学ぶ。さらに95～6%の生徒が、高等学校で数学を学ぶ。彼らは12年の学びの中で、いかなる「数学の世界」「数学に対する態度」「数学観」を獲得するのか。数学者の故遠山啓は、「術」「学」によって獲得された知識や技術を土台にして「観」を育てる視点が指導要領や授業・カリキュラムから抜け落ちていることを指摘したが、現在の「学力低下」「学力向上」の論争や運動にも、この「観」をどう育てるのかという視点は見られない。

小論では、数学的な認識や数学観の変遷を、中高生の数学関連図書の読後感想文を通して分析し、そこから中高一貫数学カリキュラムを構想するための一つの視点を示す。

キーワード：数学的認識、数学観、自分くずし・自分づくり、受験数学

はじめに

筆者は首都圏にある国立大学の附属中・高等学校で数学を教える教師である。1999年の4月から中学校の副校長を2年間つとめ、2001年からは高等学校の副校長をつとめる。15・6期中教審で公立の中高一貫校にGOサインが出され、日本のあちこちで中高一貫校が開校し、文部科学省は最終的に公立の中高一貫校500校を開校させるとしている。

青年期・思春期の「自分くずし・自分探し・自分づくり」のまっただ中の15歳段階で高校入試をはさむ現在の学校制度に異論を唱える人は多い。しかし、残念ながら、中高一貫の制度が大学受験にいかにかに有利に働くかを説く人はあっても、子どもの発達段階に即しながら自己教育の可能性や6年一貫の有用性を主張する議論が日本ではほとんどないというのが実状である。事実、東大附属や名古屋大附属・奈良女子大附属・広島大学附属や筆者が勤務する筑波大附属駒場中高などの国立附属の実践研究を別にすれば、中高一貫カリキュラムに着目した本格的な論文を筆者は目にすることがない。

東京では生徒の6割近くが私立の高等学校に通い、平均2割弱の子ども達が私立や国立の中学に進学する。

地区によっては私立・国立中進学者の数は半数を超える。筆者は教師生活35年の中で、最初の16年を公立の中学校で過ごし、残りの19年間を国立の中高一貫校で過ごした。稀少で貴重な体験を通して言えば、思春期の12歳から18歳までの6年間で一番大きな変化を遂げるのは14,5歳から16歳、つまり高校受験をはさむ中2～高1の時期である。あてがいぶちのモノに満足できず、逸脱・反抗・退行を繰り返しながら、自分固有の価値・世界観や他者との関係を求めるのがこの時期でもある。

彼らが綴った数学や科学に関する文章を読み、分析していくと、それまでの「たてまえ」的言辞から「ほんね」的言辞への転換に気づく。横並びの背較べ的発想が影を潜め、それぞれの固有の言葉遣いが目立つようになる。観察する教師にとって一番おもしろいのがこの変遷期である。

教育学者の竹内常一は「子どもの自分くずしと自分づくり」¹⁾がこの時期特有の課題であることを説いた。筆者が公立中学校在職時は、この変化に気づかずに行った。中学2年生から高校1年生にかけてのこのダイナミックでドラマチックな変化については、高校受験騒ぎの中で、生徒はもちろん親も教師も無頓着であった。

Differences in the impressions of books on mathematics felt by the students in the 7th grade, the 9th grade and the 11th grade.…… A perspective for the development of curriculum of linear junior and senior high school.

この変化に気づいたのは、高校受験のない中高一貫校に転じてからである。

30数年、中・高生の数学授業を担当しながら、夏休みや冬休み・春休みなど長期の休みに数学や科学関係の読書を課題とし、その感想文の提出を求めてきた。ねらいは、例えば中学3年生ならば「これまで学んだ数学を概観しよう。これから学ぶ数学をのぞいてみよう。」と呼びかけて、推薦図書を1冊あげておく。ただし、推薦したものに限らず本屋や図書館で探して、自分の興味や関心に従って選ぶことを認める。生徒が読んで面白かった本のリストを作ったり、毎回その中のいくつかを簡単なコメントをつけてリプリントして配布する。

当たり前のことだが、週に数時間の数学の授業で扱える中味はたかがしれている。数学全体からみればチリやホコリみたいなものだ。かりに受験があったとしても、そんなところで「できた」「できない」と騒いでみても滑稽なだけである。あてがいぶちの詰め込み的消化作業ではない自主・自発性に根ざした追求を軸にした学習方法や学習内容・課題を考える必要があるのではないか。こんなことをおぼろ気に考えながら授業を組み立て、実践を重ねてきた。子ども達それぞれが「自分にとっての『数学の世界』を見つけることができれば…」というのが読書課題をはじめたきっかけだった。単純な動機で10数年間続けてきた。ところが先に述べたような「読みの変化」がこの感想文の中にも現れてくるのである。

数学者の遠山啓は、「術」「学」によって獲得された知識や技術を土台にして「観」を育てる視点が指導要領や授業・カリキュラムから抜け落ちていることを指摘した。²⁾

本稿では、中1、中3、高2の生徒達の「数学読書感想文」を取り上げながら、子ども達の変化・成長の

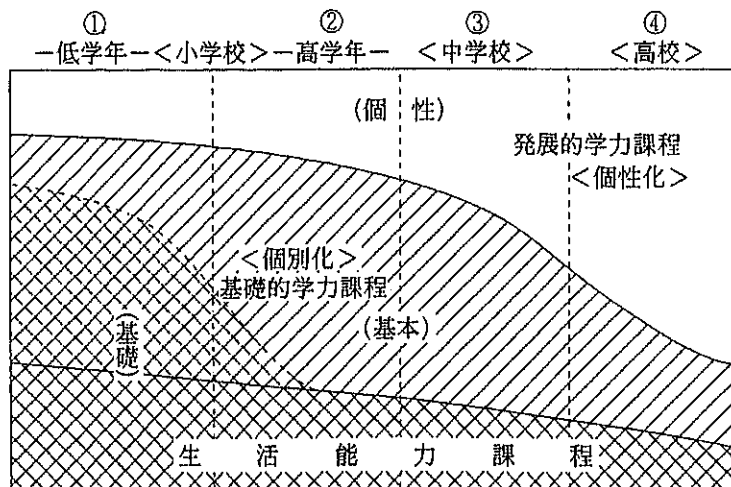
中で、子どもから大人に至る「読み」の過程はどうなっているのか、数学観や科学観はどのようにつくられ変容していくのか、彼らの将来展望はこうした作業の中にどう組み込まれるのか。授業は、彼らの進路決定にいかなる影響を及ぼしているのかなどを、子ども達の成長史のなかで眺めてみることにする。こうした観察や分析が中高一貫のカリキュラム（教科内容、学習系統、学習形態……）の構成を考えていく上で1つの視点になるはずだし、有効ではないかと考えたからである。

中高生の発達段階とカリキュラム

カリキュラム学者の安彦忠彦は「カリキュラムの三層構造・四段階論」を唱える。³⁾ 安彦の論に沿って、中学生・高校生の成長・発達およびカリキュラム構成の基本的な考え方について、できるだけ総合的に見ていく。

安彦によれば、学校カリキュラムは「生活能力課程」「基礎的学力課程（個別化）」「発展的学力課程（個性化）」の「三層構造」をなすと言う。また、小学校から高校までを一貫して見通し、①小学校低学年②小学校高学年③中学校④高校の4段階に分けて、次のように構成する。（次図）

さらに、安彦は中高生の発達段階について次のように整理する。10歳頃から「文化の各分野における主要な概念と方法」に関心が移り始める。この時期から中学校の終わり頃までに、「論理的思考」を働かすことに興味に移行し、討論や実験による分析的説明や証明などに熱心になる。「文化的に人間らしい理論的世界」に一歩足を踏み入れ、「基礎」たる「技能と感覚」を駆使して、「法則・原理・規則・ルール」などの理論的抽象概念を、実験・観察・討論・分析などの「方法」を通して形成する。この時期は、学問・芸術・科学・技術



などの文化の諸分野の主要な「概念と方法」を、時間をかけて身につけさせる指導が必要になる。

ところが、思春期の11、2歳頃になると、子どもの関心は「自分の内側」あるいは「個性」に向かう。「自分はなぜ生まれてきたのか」「自分の将来をどう考えたらよいのか」といった「生来の自分の個性を、自らの責任と努力で再構成」し始めるのである。その最初は「個性を探る」段階である。これが小学校の高学年から中学校の頃にあたる。他者との比較を通して、自分はどんな特徴を持つのか、何に向いているかなど「自分探し」を始める。

この作業は、友人と議論したり対立したり、試行錯誤やほみ出しを繰り返し、親や教師に反抗したりしながら進行する。しかし、日本の中学校では受験中心に「競争・管理」が徹底しており、こうしたほみ出しを許さないシステムが出来上がっているように筆者には思える。

この「個性を探る」活動が豊かに保証されて、初めて「個性を伸ばす」活動が効果的になる。

高校段階は「個性を伸ばす」時期の初めにあたる。中学校が「広く、浅く、短く、多く、軽く」学習できるようにすることが必要であるのに対して、高校段階では、「狭く、深く、長く、少なく、重く」学習することが必要になる。

これを数学観の変遷で見ると、受験算数が得意であった12歳の子どもたちが、中学の3年間数学を学びながら数学に対する「向き・不向き」「好き・嫌い」「面白い・つまらない」などの認識、感情が芽生え、それぞれの「距離の取り方」が目立つようになる。小学校の時は「あんなに得意だったのに…」と、親も自分も割り切れない思いを抱きながら、ズルズルと中高の6年間を過ごす生徒を筆者は何人も見てきた。

先述したように、中高の6ヶ年は「自分くずし・自分探し・自分づくり」の時代である。

現行の6-3-3に区切られた学校階梯は、義務教育の延長問題と絡めてあらためて論じられなければならないが、小手先の改革は多くの問題を抱える「はざまの中学生」に何の効果を及ぼさなかったことを考えたい。最近の中高のつなぎの見直し論(中等教育学校、中高の併設、連携)は、現状ではベターな選択だと考える。

中学3年生

まず一番変化が著しいと思われる中学3年生の「感想文」を紹介し、以下考察を進めていくことにする。さっそく中学3年生が書いた(98/8)読書感想文から見ていこう。

遠山啓「数学入門」上・下(岩波新書)レポート

中3C S. H

とりあえず上下巻を通して読んでみたが、さすがに下巻の終わりの方(微分・積分など)はよく分からなかった。そんな訳で理解できる部分からレポートを書くことにする。なぜか以前にこの本を読んだ記憶はあるのだが(引用者注、中2の授業の中で紹介したことがある)、内容の記憶がなかったので今回読んでみて、興味を持ったのは上巻VIの「円の世界」であった。

前に同様の課題が出された時にも書いたのだが、個人的にいかにも「数学」してるものは嫌いなので、古代や中世のエピソードの多いこの章は、内容的にもそれほど難しくなく、結構楽しんで読めた。「立方体の体積を2倍せよ」「角を3等分せよ」「与えられた円と等しい面積の正方形を作成せよ」といったいわゆる「難問」の起源の話や、正12面体と五角星の話などがそれである。特に、無理数の発見でひどく動揺したピタゴラス教団のかかげていた「万物は数である」という信念は、ピタゴラスらしく、いかにも完璧でありそうなものだったからである。

下巻XIの「伸縮と回転」の「ネズミ算」や「二倍物語」などから導入されたマイナスや分数の指数の説明はなぜか解りやすいと感じた。また、対数の説明の中の「感覚の強さは刺激の強さの対数に比例する」という例え話は、面白く分かりやすいものだと感じた。

また、知識としては持っていたが「そういうものだ」としか理解していなかったサイン定理やコサイン定理などもここではじめて理解することができた。

ところで、「あとがき」を読むと「だから入学試験に苦しめられた人は、数学という学問そのものがひねくれて意地の悪いものだとおもいこんでしまう。」とあるが、自分は正にそれに当てはまるのではないかと思う(数学だけでなく算数も含まれるが…)。しかも普通ならば最初の受験というのは高校受験であるが、私を含む筑駒

生（やその他の私立校生など）は小学校時代に体験している。どうも周りを見ると、ものすごく数学が好きな人と逆にどうも数学はダメだ、と両極端に偏っているが、これは言うまでもなく過去の体験のせいであろう。同じく「あとがき」には「素直な数学こそが実際の役に立つことを強調したいのである。（中略）この本を書いた目的の一つは数学の素直でのびのびした姿を知ってもらうことにあった。」とあるが、この目的はかなり達成されているのではないかと思う。個人的にはこうして課題の本にでもならなければほぼ読まなかったであろうこの本であるが、途中で投げ出さずに読破できた。ただ、「数式を飛ばして読んでも全体の意味はつかめるように配慮した」というのは、特に微分・積分などのところでは少し辛いと思った。というよりも、ほとんど式に重点が置かれているので、式が分からないと意味がつかめないのだ。

最後に本自体についてだが、初版が1960年であるせいか、言いまわしが古い部分や、現在使われない漢字の使い方（「刺戟」「防禦」「區劃」など）があり、少し読みにくいと感じたことを付け加えておく。

池野伸一／中村義作／高木茂男／ほか「数理パズル」（中公新書）

中3C Y. U

この本は4章から構成されていて、I章は数の不思議、II章はゲームの新しい魅力、III章は図形への挑戦、IV章は数理のセンスを生かす、という題で書かれており、それぞれ3～8コラムから構成されています。

I章 数の不思議

ここの最初のコラムは胸中の数字を当てるといって数当てについての例が8個あり、それぞれがどういう仕組みになっているのかということを用いて照明しています。これを見ていると数当ても方程式で証明できるのだという驚きと、このように初めの数が分からない時、文字式は便利だなということを感じました。次にさまざまな魔法陣、きらめく星陣という2つのコラムでそれぞれ魔法陣、星陣について書かれていてそれぞれについて今まで以上に理解を深めることができました。

次のコラムは文字式の仮面を剥ぐという題で書かれています。僕は初めて英語やローマ字・ひらがな・漢文などで作られたユーモラスな覆面算を見ました。そして次のコラムは三角数を図形で解くという題で書かれています。僕は普段三角数は公式で解くので図を使って解くということ事態が新鮮でした。また三角数以外の発展についても興味深く書かれていたと思います。次は間違えても間違わない数式というコラムで、その次は数字がみんな勢揃いという題で小町算について書かれています。いろいろな小町算についてコンピュータが全解を出しているみたいですが、コンピュータの凄さを感じると同時に、このようなしらみつぶしが必要とされている数学が、仕方がないことかもしれないけれど、一般からどんどん離れていって少し寂しいような気がしました。

II章 ゲームの新しい魅力

まず初めのコラムはペグ・ソテリア、次のコラムは桂馬飛びパズルという題で書かれています。この二つのコラムを読んでまず驚いたことはこのようなゲームについても解析する方法があり解析されているということでした。また一見単純そうに見えるようなものでも、数学で整理してみると奥が深いものがあるんだなと感じました。

次のパズルは箱入り娘、その次はおしどりの遊びという題のコラムです。この二つはゲームでコンピュータを用いて完全に整理というよりも数学の問題として扱い征服しているところもあるのではないかと少し感じました。この次のコラムはあやとり、そしてその次はチェーンズ・リングという題です。後者はチェーンズ・リングを二進法によって整理しているのですが、このように普通に考えると何の接点もないような物同士になんらかの関係を見つけだせるのはすごいと思うと同時に、このようにして物事は進歩していくのかなと感じました。そしてライフ・ゲームというコラムが次にあり、色分けタイルへと続いてこの章は終わります。

III章 図形への挑戦

初めのコラムは裏表がひっくり返る立体図形、続いて「ハトメ返し」の妙、次に隠れた面を折りおこすという題で書かれています。そしてこの次に自己拡大する四面体という題のコラムが書かれています。ここでは空間を隙間無く埋める・自己拡大という面白いテーマについて書かれており、よくこんなことを考えるなと思いつつ楽しく読むことが出来ました。

次のコラムは断片の造形、その次はポリオミノのパズルという題で書かれています。ここではこれらの一般的な物

について書いた後に、立方体の場合についてなどの発展させた事について書かれており、これらについての理解を深めることができ、このような問題を数学の世界へ持っていく方法について少し理解できたような気がします。

次のコラムは正方形を正方形で分割するという、聞いた感じ易しいと思ってしまうような事について書いてあります。そしてこの次は無駄のない裁ち合わせという題のコラムです。説明がすっきりと整理されていたので解りやすかったです。また帯を作るというような方法を知ることが出来てよかったです。

IV章 数理のセンスを生かす

初めのコラムは図形で作るリーグ戦の組み合わせ、次は暗号の作り方・解き方という題で書かれています。その次は天秤でニセ金を見つける法という題で書かれています。ここでは天秤がどう動くかということを表にまとめることより解いているのですが、まとめてすっきりさせると答えが見えてくることを感じさせられました。

この本はいわゆるパズルという物について書かれているのですが、この本に載っているパズルはその場限りであるというようなクイズみたいな物ではなく、答えを知りその理屈について考えていけばますます味が出てくるという物が多数あったと思います。

ただし共同執筆のため内容が一部でだぶってる物があった点と、主に中村義作さんのコラムなのですが、自作パズルの発表会兼自慢会になってしまっている物があった点は残念でした。

ここで僕が考えたその場限りにならないための条件を書いてみたいのですが、それはその問題をつきとめていく過程があり、そのつきとめた物を一般化し発展させることがあると思います。その過程に、物事を数学で整理する・数学との間になんらかの関係を見つけ出すことによって数学の世界に持っていくというようなことがあると思います。この本でも取り上げられていましたが、その方法にしらみつぶしをする場合とコンピュータを使う場合があります。これは仕方がないことだとは思いますが、少し寂しいような気がします。

しらみつぶしをしなくてもいいような方法を見つける、これが一番素晴らしいことだと思います。この本はこのようにいろいろな物事を数学で整理するという楽しみを教えてくださいました。

これらは、夏休みの読書課題として「これまで学習してきた数学を概観する。また、これから学ぶ数学の内容を探る。」目的で、遠山啓『数学入門』上・下／岩波新書を推薦します。もちろんこれ以外の物でもよいですと呼びかけ、夏休み明けに提出された2編である。熾烈な中学受験をくぐりぬげ、「受験算数・数学」イコール「数学の勉強」という観念、「できる」「点数をとる」を至上とする価値観を強固に持ち続けていたはずの生徒達だが、2年間でいつの間にかその世界から抜け出ていたという印象を持つ。『数学入門』下巻の内容は、本人も述べているように中学3年生にとって決して読みやすいものではない。日頃、ほとんど教科書は使わずに本校独自のカリキュラムにしたがって、資料やプリントで授業が進行していくので活字を追うことにそれほど抵抗がないとしても…だ。丁寧に読み込んで、自分の気持ちや考えを自分流の言葉で表現しようとしている。テストなどでは、他人と比較してどうであったかがいまだ気になる生徒達である。しかし、徐々にではあっても自分を突き放しながら自分をそして数学との関わりを考えられるようになっていく。ここに取上げたのは、こうした特徴が強く表れている物を選んだが、総じて彼らの書いたものを読み、ひとりひとりの顔やふだんの言動を思い浮かべながら「あいつ

がこんなふう考えていたのか」「あいつもずいぶんしつかり考えるようになった」など、楽しんで読めるものである。

中学1年生

次に、中学1年生の「読書感想文」を紹介しよう。課題図書は片山孝次『数学がおもしろくなる12話』、山崎圭二郎『数を考える』いずれも岩波ジュニア新書、銀林浩・榊忠男『数は生きてる』、野崎昭弘『πの話』いずれも岩波科学の本、ペレリマン・金光不二夫訳『数のはなし』東京図書である。図書館や本屋で探しだしその中から一冊選んで、要約と感想を4枚程度にまとめるよう指示した。

「できた」「他人に勝った」…という結果が重視される受験競争・受験算数の世界で鍛えられた彼らが、1学期間、学校でいままでとはいささか違う数学を学び、「考えること」「理由を説明し、記述すること」が大事なのだとどの教師からも毎日のように諭され、生徒によっては「なんか変だぞ！こんなはずではなかった」と感じ始めた最初の夏休みの課題である。中1の1学期に学習した内容に関連する物を推薦図書としてあげてある。

片山孝次『数学がおもしろくなる12話』を読んで

中1 B Y. U

この本は数学のいろいろな話を12項目に分けて、楽しく分かりやすいように書かれています。その12の項目とは「ふしぎな数"9"」「数を割る」「魔法陣をつくろう」「おもしろい数列」「数あてゲームと暦」「親愛数と完全数」「ピタゴラスの定理」「正五角形をかこう」「 π の話」「角の三等分」「集合をめぐる」です。

この中で特におもしろいとおもったものは3つあります。

一つ目は、数あてゲームと暦です。この章はまず数あてゲームについて書かれています。この数あてゲームとは、まず相手の人に150以下の数を何でもいから考えてもらいます。そしてその数を3と5と7で割った数を聞くのです。これだけで相手が考えた数を当ててしまうのです。この数を当てるには、70、21、15の「魔法の数」という物が必要です。この「魔法の数」をどのように使うかという、3で割った余りを70に、5で割った余りを21に、7で割った余りを15に、それぞれかけて加えるのです。105を超えたら105を何度か引いて105以下にすればいいのです。どうしてこうなるのかは残念ながら割愛されていますが、とてもおもしろいゲームです。次に、暦についてです。ここでは干支と12支について説明されています。干支や12支月代わられた言葉はよく僕たちも使います。辛亥革命、戊申の変、庚申塚、壬申の乱などです。これらの言葉はすべて年号を表しているのだそうです。

二つ目は、親愛数と完全数です。親愛数の例は、(220, 284)の組などです。では、親愛数という物はいったい何なのでしょう。 (220, 284)の例をとって考えてみましょう。まず真の220の真の約数は、1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110でこれらをすべてたすと284です。また、284の真の約数は1, 2, 4, 71, 142、これらをすべてたすと220になります。つまり、お互いが他の数の真の約数の和になっているという親密な関係になっているのです。次に完全数です。完全数とは、 n の真の約数の和は n 自身に等しい数 n のことを言います。完全数の例は、6, 28, 496…などです。僕は、完全数の数の神秘に心を打たれました。

三つ目は、アキレスと亀です。まずゼノンの逆説の説明をします。ゼノンの逆説とは、アキレスが前方にいる亀を追いかける。彼が亀のいた地点に追いつけば亀はすでにその前方に進んでいる。このくりかえしであって、アキレスはいつまでたっても亀に追いつくことは出来ないといった内容の物です。しかしこのゼノンの逆説は、アキレスと亀の間の距離を1 km、亀の歩速をアキレスの $1/2$ とすると、この法則は2 kmまでの間でしか通用しないのです。だから、いつまでたっても…という表現はおかしいのです。でもたとえ2 km以内でしか通用しなかったとしても、こういうゼノンの逆説のような考え方は素晴らしいと思います。

このように僕は、この本を通じていろいろなことを発見しました。数の神秘や、数や図形のおもしろさなどで、内容はちょっと難しかったけれど、中身が濃く分かりやすい本です。僕はこの本を読んで数学が本当におもしろくなりました。これからも数学を楽しみたいと思います。

銀林浩・榊忠男『数は生きている』を読んで

中1 B N. U

この本は、登場人物3人の会話形式で話しが進められているので、読みやすかった。これからは、章ごとに内容概略説明と感想を述べる。

0章 数の生いたち

プロローグには、1対1対応のことが書いてあった。1対1対応とは、ある一つのものにある一つのものを対応させていくことだ。これはいろいろな本で読んだことがあるから知っていた。次に、「数詞」という言葉がでてきた。これは、数がかかに対応していて、その対応しているものことだ。いろいろなもの数詞をつくり、数を表せるんだなと感心した。

1章 最初の数体系—自然数—

「記数法」と「命数法」のことが書いてあった。「記数法」とは数を書く方法で、「命数法」とは数を読むことだ。「記数法」にはいろいろな種類があるが、今の数字と違い、ある決まった記号をならべて、その和でかずをあ

らわしている。ずいぶん面倒くさいことをするなあと思った。また0のことも書いてあった。0はインド人が発見し、ファイとかシフラとか呼ばれていた。2進法は慣れていないけれど、慣れればおもしろいだろうなど思った。基数とは、集合の大きさであり、序数とはものの位置を表す数だ。考えてみるとなるほどと思った。

2章 量の多さを表す数—小数、分数—

ここでは単位の大きさが書いてあった。連続量を測るには人工的に単位を作らなければならない。その単位を使っても半端がでるときに、小数や分数が使われる。また、小数も地域によって違った。小数にも、基数的な面と序数的な面があることが分かった。分数では、二つの意味があることが分かった。考えてみればあたり前のことだが、それを考えることが大切だとあらためて思った。

3章 測りつくせぬ数—無理数—

数には有理数と無理数がある。無理数とは分数で表すことのできない数を言う。有理数とは、自然数を含めた分数のことを言う。無理数は聞いたことがあったが意味は知らなかった。無理数を深く考えると、頭が痛くなってしまった。無理数の計算の所は、残念ながらよく分からなかった。

4章 正反対を表す数—負の数—

ここでは、代数の授業でやったトランプゲームがでてきた。また、「ひく」と「マイナス」の違いも書いてあり、フランスの大数学者コーシーの言葉によれば、「マイナス」は名詞を形容する形容詞のようなものである。「ひく」は動詞のようなものだという例えは、とても分かりやすかった。授業でやったことがたくさんでてきた。「マイナス×マイナス＝プラス」の説明は、理屈的には分かったが、感覚的にはよく分からなかった。この問題は、いろいろな数学者が悩んだらしい。

5章 最後の数—複素数—

方程式とは、それを成り立たせる文字の値を求めるときにそう呼び、恒等式とは、文字のある範囲の値に対して成り立つことを証明するときこう呼ぶ。そして、方程式の文字を未知数といい、その値を解とか根とか呼んでいる。また、文字に対してそれに着く数字を係数と呼ぶ。2次方程式は解が2つでくる。このことの解説もわかりやすかった。ディラックのマイナスの電子の解釈がおもしろかった。黄金比のことは本で見たことがあるが、幾何が応用されているのは初めて知った。2乗してマイナス1になる数と言われると、「そういえば何だろう」と思った。そういう疑問がでてきただけで、あとはよく分からなかった。

とりあげている項目が多く、変な文章になったけれどこれで終わる。

中学1年生の書いたものに共通するのは、本の中味を丁寧にたどって、忠実な紹介になっていることだ。数学や科学関連の図書を読んでレポートにまとめるという課題が、おそらく大多数の生徒にとっては初めてのことであろうから、どう書いていいのか分からない。課題を出したときの「その本の要約と君たちの感想を…」というこちらの指示が徹底しているという事情もある。だから、仮に教師がその本を読んでいなくても、おおよその中味は彼らの文章から推察できる。厳しい受験戦争をくぐり抜けた自信からか、この年代の生徒としては物知りであり、知識のストックが小憎らしいくらいに随所に顔を出すことも共通している。文章構成が整っていることも特徴的である。

感想の部分も似たり寄ったりで、「よく分からなかったところは、もう少したってから読み直してみたい」「これから一生懸命数学を勉強したいと思う」「数学が好きになれるようにがんばりたい」…という締めくくりに終わるものが多い。自分がどう読んだかについて

は、はっきりした形ではでてこない。これは12歳という段階では無理なことではある。経験の浅さというか自分の世界がまだ確立されていない。だから、本の内容が自分の中に取り込まれてはいないし、重さがない。読む側にとって「彼ら自身の読みとりの深さや面白さ」を感じさせるものではない。タテマエ先行、頭でっかちということか。

高校2年生

最後に高校2年生の読後感（正確には、数学に関するレポートだが…）を取り上げてみる。高校2年の冬休みの課題である。筆者はこの年、高2の数学B（全員必修）を担当し、ベクトルと複素数を教えていたのだが、「複素数なんか学んできて何の役に立つのか」という疑問が文系を志望する一部の生徒から出された。事実、この授業は居眠りの時間ときめこんだり、塾の内職に明け暮れたり…が少なからずいた。そんな中で考えたのがこの課題である。初め「物理の中の数学」

というタイトルを考えていたのだが、「生物」選択者から「生物と数学」というテーマで書かせて欲しいという意見が出され、とくに本は指定せず、原稿用紙5枚程度にまとめるよう指示した。

16～17歳という段階は、漠然としてはいても「自分の適性や学びたいことは何か」「将来何を仕事として生きていくのか」の問いを重ねながら1年後に迫った大学入試への本格的な準備を始める時期である。自分の現実と将来を見据えながらの感想がそれぞれ個性的で非常に面白い。本校では、100%が大学進学を希望す

る。学校によっては、本校のように高2の数学Ⅱ・Bを必修にして共通履修させるとは限らないから、以下に紹介する生徒の数学観は本校特有のものといえるかもしれない。

特に、早い時期から理系数学、文系数学に分けて時間数にも差をつけている私立進学校では、「数学離れ」「数学に向かう意識の分化」がもっと徹底されているように思う。そして昨今の「ゆとり教育」「5日制」批判の主張・運動の流れは、結果的にこうした路線を強化している。⁴⁾

物 理 と 数 学

高2-3 H. K

物理と数学、この2つの間にはとても密接な関係があるのは誰が考えても明らかです。そして、2つのうち早く生まれたのは数学のほうであるのは歴史上の事実です。その後、数学を応用することによって物理学が生まれました。

普通、僕が考える物理と数学の関係はこれに似ていて、数学が物理のところどころで顔を出してきて、数学の計算の仕方が物理の問題解法や公式などをつくりだす手助けになっているというものでした。この段階だと、物理と数学の関係は、数学と物理は別にあり、物理が時々その計算方法を借りにくるというものにしかすぎません。

しかし、特に物理と数学のそれぞれの分野において新しいことについて考えようとするとき、お互いの違った考え方がとても役立つことがあるようです。例えば、数学の分野の中でも大きな領域を占めている微積分学は力学といっしょに生まれたといってもよいでしょう。微積分学の創始者のひとりであるニュートン（英：1642～1727）は力学の開祖でもありました。しかし、現在使われている、 dx とか $\int \dots dx$ などの記号はライプニッツ（独：1646～1710）によるものです。ライプニッツは微分法を1684年に発表しましたが、ニュートンはそれ以前（1665年頃から）微分法（ただし、ニュートンは流率法と読んだそうですが）とその逆、つまり積分法を考え出して、力学の計算に使っていたそうです。このどちらが微分法をより早く発見したのかということ巡って2人は「先取権論争」なるものを行ったということです。現在では、用語も記号もライプニッツが支配していますが、力学の分野ではニュートンにならって時間 t についての微分を文字上の点で dx/dt を x 、 d^2x/dt^2 を x などと記すことがいまでも行われているそうです。実際に僕が調べた本でも、この表し方を使っているものがありました。

そして当然、数学はこの力学から生まれた微積分学を発展させて、それが物理の分野でとても大きな威力を発揮するようになるのもしばしばあることです。

このように数学と物理はお互いにそれぞれ新しく考え出したことを出し合い、それを役に立つように発展させます。そして一方の新しく生み出したものが他方にとっても有効に働くのがこの微積分学からも明らかだと思います。

では、このように同じものならば別々に取り扱わずとも一緒にしてしまえばよいではないかという考えも出るでしょう。けれど、やはり数学と物理というように分けて考えているのですから、そこにはそれ相応の理由があると考えられます。そこで今度は、数学と物理の間にはいったいどのような違いがあるかについて考えてみることにしましょう。

では、まず数学がどのような場合において使われるのかを考えてみましょう。特に物理で使われる数学を意識して考えてみると、数学は複雑な状況のもとで起こる微妙な現象の議論のために使われたり、込み入った状況のもとで大きな数が問題になるときに使われるようです。

それぞれについて例を挙げてみます。まず数学が微妙な現象の議論について使われる場合というのは、明らかに微積分が当てはまるでしょう。微分は運動している物体の瞬時に於ける速度や加速度などを求めるのに用いられますし、積分はその瞬時の速度をたしあわせることによって位置を求めたりするので、ともにとても細

かい部分に目を付けて行われているのが分かります。また、大きな数が問題になるような場合に使われる数学というのは色々あります。例えば、対数や場合の数や平均などです。これらはとても大きな数やとても多くのパターンを処理しやすく、理解しやすいように生み出された数学の技術です。

次に、物理がいったいどのような状況で使われるのかということですが、物理の方が実際に僕たちの生活に於けるさまざまな状況においてしばしば使われるのです。例えば、力学や電磁気学や熱力学は直接私たちの生活の上で起こる現象を説明するのに役立ちます。物理の波動や原子物理はそれほど僕たちの生活の中ではなじみがありませんが、それでも自然界の現象を説明するのに役立っています。

このようにしてみると、物理と数学において使われる状況の違いは何となく分かってきます。数学というのとはものごとをできる限り一般的に議論しようとする。それに対して物理は具体的なことを行っているのです。これによって、物理と数学のいろいろな違いやそれぞれの性質が生まれてくるのです。また、この異なった視点でものごとをみることによって、さまざまな利点が得られるのです。

では、今度は物理と数学のそれぞれ別々にやることによる利点に注目して考えていきたいと思います。数学が一般的に議論するというのは、先程述べたとおりです。これによって、数学者というものはもっぱら推論の仕組みを議論するようになります。これによって、一つの命題から別な命題を導くことができ、法則をさまざまの形に変形して考えることもできるのです。このように数学は言葉プラス推論によって成り立っているのです。これを使うと、たくさんの事実のうち、論理的に一方から他方が導かれる関係が存在するというところを見抜くことができるようになるのです。

物理学はこれと異なり、現実世界の具体的な現象を相手にするのが殆どです。この現実世界という特別な場合において、数学の複雑な定理を用いると、ぐっと簡単に、かつ扱いやすくなってしまふことがあるそうです。また、物理学が数学と違うと明らかに感じられ、かつそこが物理学の特徴でもあると考えられるのは単位です。単位は物理学においては実にさまざまな種類のものがあります。一方、数学で単位が問題となってくるような場合は殆どありません。濱本先生（筑波大駒場高：物理担当）がおっしゃるには、単位を間違えているような解答は「罪が重い」のだそうです。またこれによって記号も重要な意味をもってくることになります。なぜなら、物理学において記号と単位はセットになっているからなのです。これも数学とは違うところなのです。

さて、物理が単位にこだわることから得られる利点とはいったい何かということ、ずばり当て推量で新しいものを考える時でも使えるということ、単位をよく見ることによって答えがほしい分かります。こういうところからでているのかもしれませんが、物理学にはきっちりとした数学的厳密性というものとはそれほど役立たないようです。また、物理学の性格として「観察事実を拠り所を求めつつ、法則を追求する」というものがあるそうです。これが今まで述べてきたような物理の性質を形づくっているのかもしれませんが。

このように、数学は抽象的な視点から、物理は具体的な視点からものごとを考えることによって、それぞれ新しい考えを生み出し、そして新しい考えがもう一方にもたらされ、また新しい考えを生み出すというようになっているのが、現在の数学と物理の関係のように思います。

（参考資料） * R・P・ファインマン、江沢洋訳「物理法則はいかにして発見されたか」ダイヤモンド社
* 朝永振一郎「物理学とは何だろうか」岩波新書

高校2年生のレポートを一編紹介したが、中1・中3生の読書感想文とはあきらかに違う。教師から課せられた課題だが、自分なりに焦点を定めて少なくとも数冊に目を通し、かなり思索を重ねて自分の言葉でまとめあげていることがわかる。何より読み応えがあるし、この5年間の成長を感じさせるものだ。内容的にも専門的な記述が目立ち、気負いもあるが中味はずっしり重い。大学で何を専攻するのか、自分は将来何を生業（なりわい）にして生きるのか、あるいは現在の自分の興味・関心がどこにあるのかをかなり意識しな

がら綴っていることがひしひしと伝わってくる文章が目につく。原稿用紙5枚のはずがびっしり詰まったレポート用紙5枚なんてこともざらにある。書きたいことが次々に湧き出てくる感じもみてとれる。もちろん、数は少ないが高2段階で数学に見切りをつけた生徒もいて、読んだ本の要約とおぎなりの感想という義務的なレポートもある。この実態については、個性差と考えるしかない。

しかし、中1・中3との落差は大きい。この違いはいったいどう考えたらいいのだろう。この2年間の学

習経験、それも自分の将来や出番を探りながらの生活が背景にあることは間違いない。

ここで紹介した5つのレポートは、本校ではそれほど珍しいものではない。もちろん優れて特徴的なものではあるのだが、それぞれの学年の子ども達の特徴や傾向が典型的に表れていると思われるものを紹介した。高校2年生のレポートに触れながら感じたことは、「自分で探る」「自分を伸ばす」ことの楽しさ・手応えを手にした子ども達の知的好奇心や学習能力の成長は、我々大人達の予想をはるかに超えている。乱暴に言ってしまうと、中学・高校の教師の役割は彼らの意欲・知的好奇心に火をつけることであって、大学受験の準備教育ではないはずなのだ。どこの大学に行くか、何を専攻するか、…について、教師が相談にのれることはあっても最終的に決するのは彼ら自身である。この当たり前のことが、世間的にはなかなか通用しない。彼らが大学受験のために塾へ行こうが、予備校に通おうが、それは彼らが必要に応じて判断することで、教師が目くじらを立てることではない。同じ受験であっても中学受験とは明らかに異なる。

一方、中学受験組のバーンアウトは深刻である。筆者の勤務校でも各学年に何人かはいる。小学校時代の進学塾通い、受験・入学については、子ども自身の意志というよりは、親の意向が強く働いている。入学できた途端に、いままで自分を支えてきた柱や軸が機能しなくなる。新たに自分を何によって支えていくか、中高における自分の課題は何か…を模索しなければならないのだが、この切り替えがうまくいかない子どもの中には、受験させた親を恨んだり、不登校に苦しむ生徒もでてくる。年齢主義をとる中学ではともかく、修得主義を建前とする高校では、相当しんどい。このケースでは、親の姿勢も問題となる。

学びを「あてがいぶちの効率的な消化作業」から「悩み、楽しみながら考え、探る作業」「個性を探り、伸ばす作業」へ転換することが必要なのである。能力的には、相当なポテンシャルを有する生徒達だが、この転換ができるかできないかによって決定的な差異が生じる。

青年期と中高一貫数学科カリキュラム構成の視点

数学の中高一貫のカリキュラム構成を考える視点に話を進めよう。95%強の子ども達が高校に進学し、さらに高校卒業生の7割近くが専門学校・短大を含めて上級学校に進学する時代である。高校の進学率が30%前後であった時代のカリキュラムと同じでいいはずがない。日本では、中学までは義務教育で履修主義が原

則であり、高校は課程主義・修得主義（現実には、この原則は大きく崩れている。「この子は努力しているから単位だけは認定しよう」は日本の高校の今や常識である。）がとられる。だから仮に、近い将来、義務教育の延長があったとしても中学3年までで一応完結させたい数学の中味とは何かを考える必要がある。数学の基礎・基本に加えて、上級学校の準備的内容ばかりでない市民的教養としての数学の中味が探られなければならない。

筆者は、中学生相手に数十年、ときに教科書から大きく離れてさまざまな試行錯誤を繰り返してきた。例えば、「環境問題と数学」「貿易摩擦と数学」などである。高校受験がない学校だから可能なことだが、大学受験はとりあえず脇に置いて市民的教養としての数学の中身とは何かを探りながら実践してみた。⁶⁾ 指導要領の範囲外で、中1からの3年間で試みてきたこと、高校でわざわざ試みた内容を以下にあげてみる。

- | |
|--|
| 中学1年(代数分野2時間担当一他に幾何分野2時間) |
| ・初等整数論 12時間 |
| ・17番目の数の不思議 2時間(数列論) |
| 中学2年(全分野4時間担当) |
| ・複比例関数を中心とした多変数関数 4時間 |
| ・アフィン変換 3時間 |
| ・3元1次連立方程式 2時間 |
| ・簡単な線形計画法 4時間 |
| ・三角形の五心 4時間 |
| 中学3年(教科書分野3時間担当 一他にトピックス1時間、選択週2時間10~12名) |
| ・一般の2次関数 10時間 |
| ・さまざまなトピックス(経済と力学・環境問題を中心と…)と関数 5時間 |
| ・正多面体とデルタ多面体 6時間 |
| ・実験や調査を中心とした統計 10時間 |
| テーマ学習(中学3年生のテーマ学習 : 2時間続きの少人数・選択授業) |
| ・ガリレオ・ガリレイを読む 16時間 |

高校で試みたこと

- ・人口移動問題とマルコフ連鎖
- ・社会科学と行列
- ・オイラーの贈り物
- ・一次変換と行列
- ・固有値問題
- ・多変量解析と行列

高校から、新たに40名が入学するため、多少のフライングはあっても高校の内容には踏み込まないよう

にしている。数学の教科担任は、学年全クラスを担当し、3年間は持ち上がり原則であるため、3年間で教科書の基本的内容を押さえておけば、後は教師裁量でいかようにも組み替えることができる。全クラス担当と3年間の持ち上がりシステムを全国の中学校で実施するだけで、学校数学のイメージはずいぶんと変わるだろう。教師にとっても「いついつまでに終わらせなければ、共通定期試験に対応できないし、次の学年に引き継げない」という脅迫から解放され、気分も楽になるはずだ。それがさらに6年になれば、教師にとっても生徒にとっても、かなりゆとりを持ってはみ出したり、「いきつもどりつ」しながら授業・学習に取り組めるであろうから、教科指導上より効果的であることは明らかだ。これは、公立の中学校教師と中高一貫校の教師とともに10年以上経験した筆者のいつわらざる実感でもある。

あらためて、「青年期の学び」について考えてみよう。

中学生や高校生は授業をはじめとするさまざまな学び、学校行事、クラブ活動、友人とのつきあい、家庭生活などの中に、自分にとっての意味や意義を見だし、解釈し、納得しながら、表現し、活動することを求める。自分とは異なる他者を自分の中に取り込み、自足してきた自分から抜け出す＜自分探し＞を始める。苛立ち、沈黙、対立、失敗、模索、彷徨を繰り返し、自分の居場所を求め、自分を将来を探る。だから、一つひとつの行動や学習が彼らのアイデンティティー形成に何らかの影響をおよぼす。これが青年期の課題であり、特徴である。(中高一貫と学校行事の持つ人間(リーダー)形成機能については根津朋実・井上正允・田中統治による日本カリキュラム学会誌所収「中高一貫校の異年齢構成による学校行事が果たすリーダー形成機能」『カリキュラム研究』第13号2004.3を参照のこと)

子ども達一人ひとりの発達・成長は、個性的に、しかも共同的に追求されなければならない。発達・成長は常にスクラップ&ビルドを繰り返す。弁証法的であり、そこでは大いなる無理、無駄が必要である。知的好奇心を誘発し、友人との対話を繰り返し、じっくり探索・彷徨させることのできる時間と空間が確保されねばならぬ。中学校や高等学校はまさにそうした時間と空間である。現在、学校教育を混乱させている「学力向上」運動は「ゆとり教育」の揺り戻しと見られなくもないが、効率原則やマニフェスト的到達目標(数値目標)や評価基準など、筆者から見ると明らかに行き過ぎである。人間を育てる営みは、製品を作り、販

売するプロセスとは明らかに違う。経済の論理と教育の論理は相容れない。

まとめにかえて

本稿では、中1→中3→高2生徒の数学関連図書の見聞感想文の変遷をたどりながら、中高生の「数学観」の変遷をみてきた。それぞれの学校現場、そしてそれぞれの生徒の実情から「授業やカリキュラムの構想」がなされる必要があるとの思いからである。「学力向上」か「ゆとり」かという問題は、二者択一に論じられるべきものではなく、それぞれの学校や教師一人ひとりが判断すればよいことで外側からの圧力で決めるべきことではない。「個別化」「個性化」「選択科目」「習熟度別指導」についても同様である。学校が抱える生徒の実態に応じてカリキュラムや授業が構想される必要がある。おそらく、現在の「学力向上」重視や「受験学力」復活待望という流れ⁶⁾からは、「子ども達の数学観の変遷」から授業やカリキュラムを構想するという発想は出てこないだろう。

しかし、カリキュラムや授業は子ども達の現実とひとりの教師として伝えたいこと、指導要領や教科書の突き合わせの中から出発することが原則である。教師が蓄えてきた経験や直感をもっと大事にされてよい。同時に、中高生の知的好奇心や自発性、自己教育力をもっと信頼してもいいのではないかと。

最近の教育改革の動向について、考えてみる。筆者は、政府・文科省を頂点とする上意下達の指示系統は崩れたと考えている。新自由主義の教育改革は、地方分権や国立大学法人化などに見られるように着実に進行している。東京の石原都政の教育改革は「民主主義教育に対する攻撃・挑戦」という意味で突出しているが、一部の識者が主張するようにこれが全国に広がるとは思えない。なぜなら、現実に日本の各地でさまざまな教育改革が進行しているからである。政府・文科省はこのさまざまな教育改革を是認している。というより、「中央集権から地方分権へ」という流れの中で是認せざるを得ない。むしろ、都道府県教委や国立大学の事務方が文科省という後ろ盾を失いうろたえているというのが、実情である。財界は、今後「市場原理」を崩さずに「自己選択」「自己責任」論を推し進めるだろう。多種多様な教育改革や改革提言が行われ、この文脈からは義務教育であっても受益者負担や無償制の見直しはこれからの教育改革の焦点になるだろう。学校選択制や民間校長・教育特区はますます広がるだろう。中高一貫校も確実に増えるだろう。しかし、義務

教育の無償制や教科書の検定制度は、文科省は手放すことはない。これは、文科省の生命線であり、これを手放したら最後、「文科省解体論・不要論」が再燃するからである。⁷⁾

中高一貫の数学カリキュラムの具体化については残された課題だが、「学び」を『あてがいぶちの効率的な消化作業』から『悩み、楽しみながら考え、探る作業』に転換したい「生徒ひとり一人に、自分にとっての数学の世界を獲得させたい」と考えてきた現場教師からの報告・提案である。

* 本報告は、2004年の読売教育賞（算数・数学部門）の優秀賞を受賞した論考に、加筆・修正を加えたものである。

註・引用・参考文献

(1) 竹内常一『子どもの自分くずし・自分づくり』1987 東京大学出版会、〃 『子どもの自分くずし、その後』1998 太郎次郎社

(2) 遠山啓稿「序列主義の克服をめざして」『教育』1972.6 国土社（遠山『競争原理を超えて』1976 太郎次郎社に再録）

遠山は、雑多な知識としてつめこまれている知識や技術を総合し、それらを統一し、それを世界観・人生観・社会観・労働観・職業観などにまで高めるような領域を「観」と呼んだ。「術」「学」によって獲得された知識や技術を土台として、「観」を自己形成させる機会を学校は用意するべきであると説いた。

(3) 安彦忠彦『中学校カリキュラムの独自性と構成原理』1997 明治図書、〃 『新学力観と基礎学力—何が問われているか—』1996 明治図書

(4) 「ゆとり教育」や「学校5日制」批判等のここ数年の動きは、理系の研究者（『分数ができない大学生』など）や一部の教育学者が文部省批判を唱え、これに、塾業界やマスコミが乗り一大キャンペーンを展開し、「公立校」「国立校」不信・不安をおおったものと、筆者は考えている。

(5) 汐見稔幸・井上正允・小寺隆幸編『時代は動く！ どうする算数・数学教育』1999 国土社。この本全体の構想・コンセプトが、「市民的教養としての数学」をどう組み立てたらいいのかである。「学力低下」「ゆとり」論争に対する一つのアンチテーゼを目論んだもの。井上正允稿「シチズンシップ（市民的教養）としての数学教育を構築したい」『高等学校の理科・数学教育の改革への提言』（研究代表者長崎栄三 2003.3 国立教育政策研究所）に所収

(6) 例えば、陰山英男『本当の学力をつける本』2002 文藝春秋。あるいは和田秀樹の「学力低下」をめぐる一連の著作 等

(7) 新自由主義の教育改革については、『選択・責任・連帯の教育改革—学校の機能回復をめざして—』平成11年（1999）社会生産性本部：社会政策特別委員会（委員長、堤清二）を参照のこと