



2018年度：数学の最前線：未解決の問題への挑戦

著者	西村 泰一
発行年	2018
URL	http://hdl.handle.net/2241/00154195

地球球体説

前5c. 初頭
古代ギリシア

前8c. 半ば

前6c. 半ば

地中海世界

植民

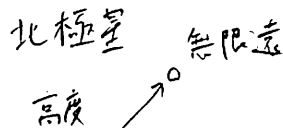
イスタンブール



ビザンティウム

都市

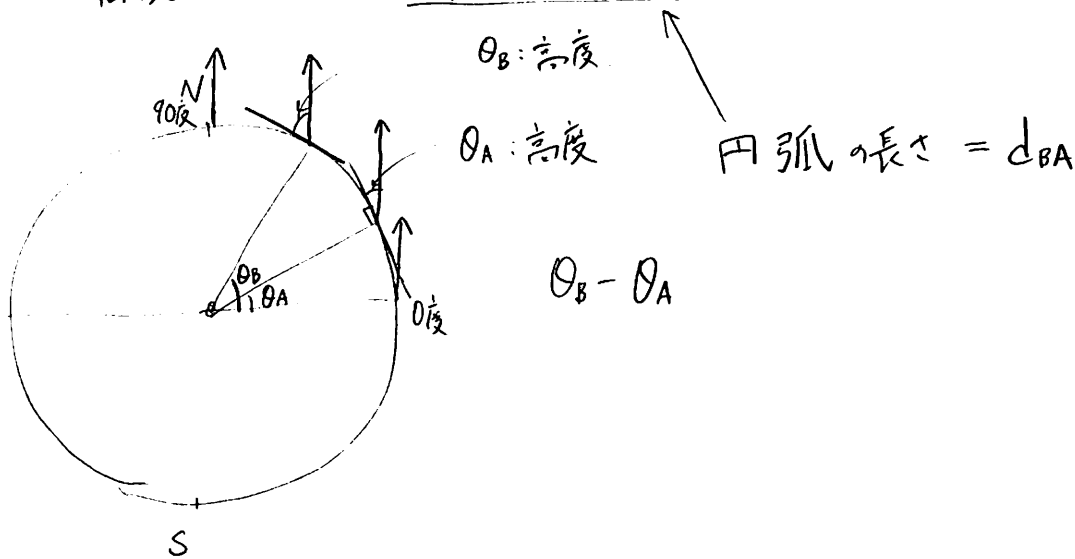
フェニキア人



平面

- 1) 東西の移動では高度に変化なし
- 2) 南から北への移動では高度に増大する。

高度の増え方は移動した距離に比例する。



半径

エラトステネス (前3c.) - アルキメデスの友人

$$\frac{d_{BA}}{\theta_B - \theta_A} = \frac{\text{地球の周囲長さ}}{360}$$

誤差1%以下

エジプト アレクサンドリア
アレクサンダー大王

図書館
ムセイオン

→ 火焼打ち
ムスリム
キリスト教徒

地球 月 アリストアルコス
太陽

中世末 コペルニクス 太陽中心説
トスカネリ 地球球体説

↑
ニコラウス

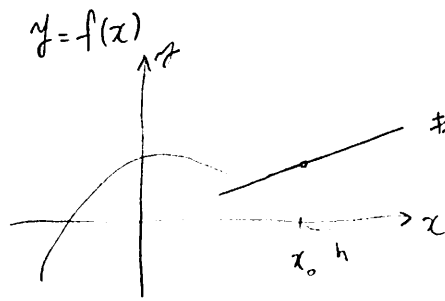
← 屈折

大気

微積分 静学
力学

力学
万有引力の法則

Newton
(17c)



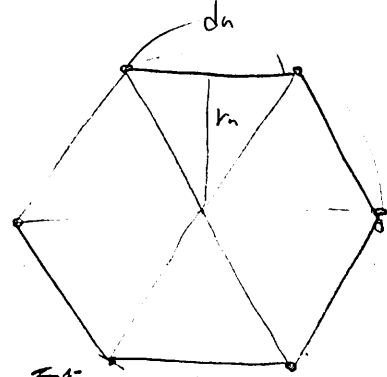
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \left| \begin{array}{l} \text{平均の変化率} \\ \text{接線の傾き} \end{array} \right.$$

17 }
18 } ← 高校
19

微分 \Leftarrow 極限. $\epsilon-\delta$
19c.

円の周囲の長 $= d_n$
(半径 r) \uparrow
 r に比例

$$d_n = 2\pi r$$



アルキメデス (前3c.) \rightarrow 三利島
円の面積 πr^2
ローマ帝国
私の円を乱すな!

内接する正n角形の面積 \leq 円の面積

$$n \cdot \frac{1}{2} d_n \cdot r_n = \frac{1}{2} n d_n \cdot r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi r^2$$

\downarrow $2\pi r$ \downarrow r (極限の考えはまだ確立していなかった)

Newton の時代

h が十分小 \pm ければ

$$h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) \text{ が成り立つ}$$

$$h^2 = 0 \text{ (巾零無限小)}$$

$$\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$$

$$(\exists! a \in \mathbb{R}) (\forall d \in D) (\varphi(d) = \varphi(0) + ad)$$

$$\begin{aligned} \varphi(d) &= f(x_0+d) \text{ とおす} \\ (\varphi(0) &= f(x_0)) \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varphi(d) &= \varphi(0) + ad \\ f(x_0+d) &= f(x_0) + ad \text{ とおす } a \in \mathbb{R} \text{ が存在.} \end{aligned}$$

$$\therefore a \in f'(x_0) \text{ とおす.}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$$

$$f(x_0+d) + g(x_0+d)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)d + g(x_0) + g'(x_0)d$$

$$= f(x_0) + g(x_0) + d \{f'(x_0) + g'(x_0)\}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

\downarrow

\downarrow

$$f'(x_0)$$

$$g'(x_0)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Leibniz の公式})$$

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

実際 $1 = 1 \cdot 1 = 1$

$$f(x_0+d)g(x_0+d) = \{f(x_0) + f'(x_0)d\} \{g(x_0) + g'(x_0)d\}$$

$$= f(x_0)g(x_0) + \underbrace{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}_{\text{Leibniz}} d + f'(x_0)g'(x_0)d^2$$

Barkley (哲学者) ← Leibniz の 1-コネクト

$$D. \quad a \in \mathbb{R}, d \in D$$

$$ad \in D \quad (?) \quad (ad)^2 = a^2 d^2 = a^2 \cdot 0 = 0$$

$$d_1, d_2 \in D$$

$$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 0 + 0 + 2d_1d_2$$

$$(d_1 + d_2)^3 = d_1^3 + d_2^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 = 0$$

$$D_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$$

$$\text{report I} \quad d_1 \in D_n, d_2 \in D_m \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{n+m}$$

(hint. = 項定理)

$$\text{Corollary} \quad d_1, \dots, d_n \in D \Rightarrow d_1 + \dots + d_n \in D$$

$$d_1 \in D, \\ f(x_0 + d_1) = f(x_0) + f'(x_0) d_1$$

$$d_1, d_2 \in D$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + d_1 + d_2) &= f(x_0 + d_1) + f'(x_0 + d_1) d_2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) d_1 + \{f'(x_0) + f''(x_0) d_1\} d_2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + \frac{1}{2} f''(x_0) (d_1 + d_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 \in D, \\ f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3) &= f(x_0 + d_1 + d_2) + f'(x_0 + d_1 + d_2) d_3 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2 \\ &\quad + \{f'(x_0) + f''(x_0) (d_1 + d_2) + f'''(x_0) d_1 d_2\} d_3 \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2 + d_3) + f''(x_0) (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + f''' d_1 d_2 d_3 \\ &= \dots \quad \text{Taylor 展開} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3)^2}{3} \\ d_1 d_2 d_3 &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3)^3}{3} \end{aligned}$$

report II

(1) $f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$

(2) $f(x_0 + d_1 + \dots + d_5)$

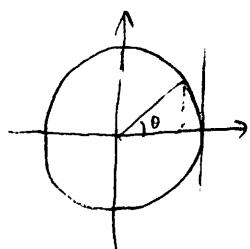
o $f(x) = C$

$$f(x_0 + d) - f(x_0) = C - C = 0 = (0) \cdot d \quad \therefore f'(x_0) = 0$$

o $f(x) = x$

$$f(x_0 + d) - f(x_0) = x_0 + d - x_0 = d = 1 \cdot d \quad \therefore f'(x_0) = 1$$

o 三角関数



$$d \ll 1 \text{ かつ } d^2 = 0$$

$$\sin d = d$$

$$\cos d = 1$$

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + d) &= \sin x_0 \cos d + \cos x_0 \sin d \\ &= \sin x_0 + (\cos x_0) d \end{aligned}$$

$$\therefore \sin' = \cos$$

$$\begin{aligned} \cos(x_0 + d) &= \cos x_0 \cos d - \sin x_0 \sin d \\ &= \cos x_0 - (\sin x_0) d \end{aligned}$$

$$\therefore \cos' = -\sin$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

高校 7/14

◦ 指数関数

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e > 0 \text{ (正の数と決る)} \quad 10^d = 10^0 + ad$$

$$(e^x)' = ?$$

$$e^{x+d} = (10^{\log_{10} e})^{x+d} = 10^{(\log_{10} e)(x+d)} = 10^{(\log_{10} e)x} \cdot 10^{(\log_{10} e)d}$$

$$= e^x (1 + a(\log_{10} e)d) = e^x + e^x \cdot \underbrace{a(\log_{10} e)d}$$

↓

$$= \text{「} \log_{10} e \text{」} (e^x)' = e^x \log_{10} e$$