



## 2018年度：数学の最前線：未解決の問題への挑戦

著者	西村 泰一
発行年	2018
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2241/00154195">http://hdl.handle.net/2241/00154195</a>

地球 球体説 .

前5C初頭 . 古代ギリシャ .

前8C半ば } 植民地 , 地中海世界 .  
前6C半ば }

イスタンプール

↑  
ビザンチウム .

都市 .

フェニキヤ人 .

→ 北極星に気付いた .

→ 高度が場所により異なることに気付いた .

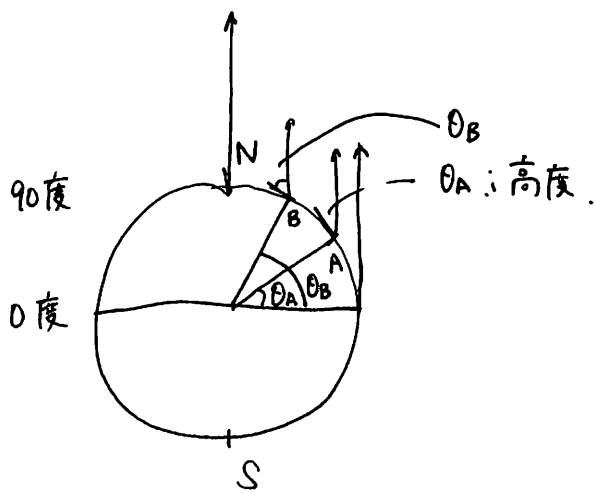
もし地球が平面だとしたら、北極星は、遠くにある。(無限遠) .

→ 2とをみ比べると、高度が場所によって異なることがおかし .

→ 1) 東西の移動では高度に変化なし .

2) 南→北では、高度は、増大する .

更に、高度の増え方は、移動した距離に比例する .



A → B に移動した時、 $\theta_B - \theta_A$  増加 .

ギリシャの人は、幾何学大好きなんですね。

そこのところがあって、地球が球体になるんですね。

ギリシャの人は、どれくらい好きなんですか。ひまわりだから数学好きなんですか。

先に話はお聞き済みです。

地球が球体だとしたら、半径を測るにはどうするの。

半径

エラトステネス (ゾレキメデスの友人)。

前300

$$\frac{d_{BA}}{\theta_B - \theta_A} = \frac{\text{地球の周囲の長さ}}{360}$$

結果として、誤差が1%以下。すごいんですね。

文化というのは、常に increase ではない。

文化というのは、なくなることもあるんですね。

アレクサンドリア そこに、図書館 (ムセイオン) があった。

エラトステネスは、その館長。もう記録は、残っていない。

理由は、煉瓦打ちにある。煉瓦打ちは、ムスリムの専売特許ではないか。

キリスト教が最初。聖書が良ければ、それ以外は、まがまがしいものとして、

破かいあることに、FBI、まがいなものはない。

数学でユークリッド“原論”があるけど、これは、今に続いている。

地球と月、太陽の distance もゾリスタリウスによって、測られた。

光が直進することは、知っていたけど、地球の大气で、光が屈折することを考慮しなかった。

中世末 ジョルダニクス 太陽中心説。

トスカネリ 地球球体説。→ 半径を計算してあげると、小さくなった。

ジョルダニクスは、今までは、東周りだったけど、西周りをいうはず。

しかもトスカネリは半径を小さくみだっていたから、西に出発した。

ゾリスタリウスは、これをインドに思いついたから、インドに連れて行ってあげようと思った。

微積分. 古代ギリシアでは静学.

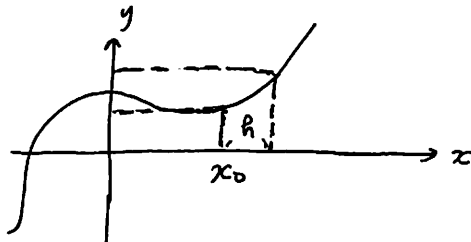
数学, 力学, 万有引力の法則 : Newton (17c)

こういったことを行うには, 微積分が必要になってきます.

19c以降の微積分というのは, それ以前と異なる.

高校では, 19c以降のものをやる.

$$y = f(x)$$



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

平均の変化率.  
←  $x_0$  での接線の傾きを出している.

微分 ← 極限が必要になる. (高校では, 極限や2, 微分をやる構成になる)

↑  
やる必要と, 番号高い  $\epsilon - \delta$  をやることに.

極限の概念の数学. 世界に確率があるから19c. 出てきた.

アルキメデス 円面積  $\pi r^2$ .  
(前3c).

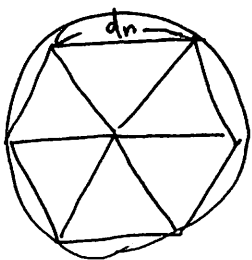
↑  
ローマ帝国がでてる時代だから.  
シチリア島にいたんだから.

幾何学をやっている時, ローマ兵に押し, 「私を円を盗るぞ。」と脅かされた.

円周囲の長さ,  $2\pi r$ ,  $r$  に比例  $\rightarrow dr = 2\pi r$ ,  $r$  を消すと  $\pi$  が決まった.

内接正n角形の面積  $\leq$  円の面積  $\leq$  外接正

$n=6$



$$n \cdot \frac{1}{2} d_n r_n = \frac{1}{2} (n d_n) r_n$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 2\pi r & & r \\ \hline & & \downarrow \\ & & \pi r^2 \end{array}$$

$$h \quad f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$$

↑  $h$  が十分に小さいとき、成立すると考えた。

→  $\forall \epsilon < \delta$   $h$  が小さいとき。

$$\frac{h^2}{h} = 0 \quad \text{と} \quad \epsilon < \delta, \quad \text{小さい。}$$

↑

中置無限小とよび、 $h$  は無限小である。

$$\mathcal{D} = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  とは関数があるとき、 $\forall d \in \mathcal{D}$ ,

$$\exists! a \in \mathbb{R} \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad \varphi(d) = \varphi(0) + ad$$

$$\varphi(d) = f(x_0+d)$$

$$\varphi(0) = f(x_0)$$

$$\rightarrow \varphi(d) = \varphi(0) + \underbrace{a}_{f'(x_0)} d$$

$f(x_0+d) \quad f(x_0)$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right)$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

これは、19C以降のやり方。

20C以前のやり方、

$$f(x_0+d) + g(x_0+d)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)d + g(x_0) + g'(x_0)d$$

$$= f(x_0) + g(x_0) + \{f'(x_0) + g'(x_0)\}d$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Leibniz の公式})$$

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$h \rightarrow 0$

$$\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\begin{aligned} f(x_0+d)g(x_0+d) &= \{f(x_0) + f'(x_0)d\} \{g(x_0) + g'(x_0)d\} \\ &= f(x_0)g(x_0) + \{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\}d + f'(x_0)g'(x_0)d^2 \end{aligned}$$

claim は Leibniz 公式. Leibniz, Berkeley (哲学者). 1721 No comment.

$$a \in \mathbb{R}, d \in \mathcal{D} \rightarrow ad \in \mathcal{D} \quad (ad^2 = 0)$$

$$d_1, d_2 \in \mathcal{D} \rightarrow (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_1d_2 = d_1d_2 \leftarrow \text{足し算は関数閉じている}$$

$$(d_1 + d_2)^3 = d_1^3 + d_2^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 = 0$$

$$\mathcal{D}_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$$

report 1.

$$d_1 \in \mathcal{D}_n, d_2 \in \mathcal{D}_m \rightarrow d_1 + d_2 \in \mathcal{D}_{n+m}$$

(hint 2項定理)

Corollary

$$d_1, \dots, d_n \in \mathcal{D}_1 \rightarrow d_1 + \dots + d_n \in \mathcal{D}_n$$

$$d_1 \in \mathcal{D}_1$$

$$f(x_0 + d_1) = f(x_0) + f'(x_0) d_1$$

$$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$$

$$f(x_0 + d_1 + d_2) = f(x_0 + d_1) + f'(x_0 + d_1) d_2$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) d_1 + \{ f'(x_0) + f''(x_0) d_1 \} d_2$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + \frac{1}{2} f''(x_0) (d_1 + d_2)^2$$

$$d_1 d_2 = \frac{(d_1 + d_2)^2}{2}$$

$$d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}$$

$$f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3) = f(x_0 + d_1 + d_2) + f'(x_0 + d_1 + d_2) d_3$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2 +$$

$$+ \{ f'(x_0) + f''(x_0) (d_1 + d_2) + f'''(x_0) d_1 d_2 \} d_3$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) (d_1 + d_2 + d_3) + f''(x_0) (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + f'''(x_0) d_1 d_2 d_3$$

$$= \text{Taylor 展開 } 1 = 2 = 3 \text{ まで}$$

$$d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 = \frac{(d_1 + d_2 + d_3)^2}{2}$$

$$d_1 d_2 d_3 = \frac{(d_1 + d_2 + d_3)^3}{3}$$

report II.

$$(1) f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$$

$$(2) f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)$$

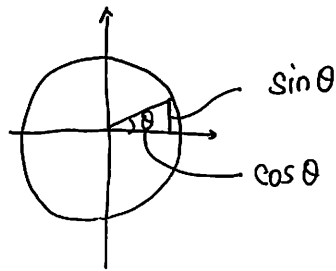
$$f(x) = c \text{ (定数)}$$

$$f(x_0 + d) - f(x_0) = c - c = 0 = 0 \cdot d \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x$$

$$f(x_0 + d) - f(x_0) = x_0 + d - x_0 = d = 1 \cdot d \rightarrow f'(x) = 1$$

## 三角関数.



$d \in \mathbb{D}$ .

$$d \text{ 很小的とき, } \begin{aligned} \sin d &= d. \\ \cos d &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + d) &= \sin(x_0) \cos(d) + \cos(x_0) \sin(d). \\ &= \sin x_0 + \cos x_0 \cdot d \quad \rightarrow \sin' = \cos \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x_0 + d) &= \cos x_0 \cos d - \sin x_0 \sin d \\ &= \cos x_0 - \sin x_0 \cdot d, \quad \rightarrow \cos' = -\sin. \end{aligned}$$

高校あたり,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

とやった。

指数関数.

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$e > 0$ ,  $e = 2.718281828459045$ ...

$(e^x)'$  と考える。

$$\begin{aligned} e^{x+d} &= (10^{\log_{10} e})^{x+d} = 10^{(\log_{10} e)(x+d)} = 10^{(\log_{10} e)x} \cdot 10^{(\log_{10} e)d}. \\ &= e^x (1 + a (\log_{10} e) d) \\ &= e^x + e^x \cdot a \cdot (\log_{10} e) d. \end{aligned}$$