2018年度 情報数学III

情報数学III講義（第8回）

平成30年12月12日

§ 復習：Cauchy の積分定理

複素平面において、a を中心とした半径 R の円 γ において、f を正則関数、z をこの円内部の点とするとき、次の式が成り立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

§ 補題：多項式関数

n 次の多項式 $z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$（$a_n \neq 0$）を始めとした，冪級数で表せる多項式は全て正則である．

では続きとして，複素平面において点 a $(\in \mathbb{C})$ を中心とした半径 R の円の中に点 z を取るとコーシーの積分公式より次のように表せる．

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)}dw \end{aligned}$$

いま，w は γ 上を動いている点であり，z は円の内部の点であるため，$|w-a| = R > |z-a|$ という関係になる．ここで，等比級数の和の公式を思い出すと $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right| < 1$ より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w-a)-(z-a)} &= \frac{1}{(w-a)\left(1-\dfrac{z-a}{w-a}\right)} \\ &= \frac{1}{w-a}\left\{1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3+\cdots\right\} \end{aligned}$$

のような無限級数の和で表すことができる．したがって，

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\left\{\frac{1}{(w-a)}+\frac{(z-a)}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\cdots\right\}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}dw+(z-a)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+(z-a)^2\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^3}dw+\cdots\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{b_0+(z-a)b_1+(z-a)^2b_2+\cdots\right\} \quad (b_i\text{は定数})
\end{aligned}
$$

となる（→モレラの定理）．三角関数や指数関数のように冪級数で書けるものは正則であることは学習済みだが，いま得られた結果から，複素平面全体ではないが，正則であれば少なくともこの円周の内部では $(z-a)$ の冪級数で表現できることを示せた．

6.3 モレラの定理

複素平面全体で定義された正則関数 f が上に有界（$\max\{|f(z)| \mid z\in\mathbb{C}\}\leq M$）ならば，$f$ は定数関数であることをモレラ（Morera）の定理という．

まずはじめに，この定理の系として代数学の基本定理である､『定数でない複素係数の多項式関数 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$（$a_n\neq 0,\ n\geq 1$）では必ず解を持つ』ことを示したい．

$f(z)=0$ が解を持たないと仮定すると，$f(z)\neq 0$ となるため、$\dfrac{1}{f(z)}$ が複素平面全体で定義されることになる。したがって、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{f(z)} &= \frac{1}{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0} \\
&= \frac{1}{\underline{z^n\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{z}+\dfrac{a_{n-2}}{z^2}+\cdots+\dfrac{a_0}{z^n}\right)}} \leq M
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つ．これは，$|z|$ をどんどん大きくすると分母が定数に近づいて（上式の下線部が a_n に近づく），平面全体でなにかある定数 M で抑えられることを表す．したがって，先ほどのモレラの定理を満たすため $\dfrac{1}{f(z)}$ が定数関数ということになる．つまり、定数 c を用いることで

$$
a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=\frac{1}{c}
$$

と表されるはずである。しかしこの式が成り立つと、$a_0=\dfrac{1}{c}$ となってしまい、$a_nz^n+\cdots+a_1z=0$ が成り立つことになる。これは $a_n\neq 0$ に矛盾する。したがっ

て、$f(z)$ は必ず解を持つ．

では，続いてモレラの定理を証明したい．

例えば実数の世界では f、閉区間 $[a,b]$ について考えるとき、$|f(x)| \leq M$ であるならば、$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$ ($b-a$ は区間の長さ) が成り立つ。これと同様に考えてみる。

複素平面全体で正則関数が定義されているため、原点中心の円を考えるとき、半径 R はいくらでも大きく取ることができる．これを踏まえて，冪級数で表現した f の 1 次項について考えると，

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^2}dz\right| &= \int_\gamma \frac{|f(w)|}{|(w-a)^2|} \cdot 2\pi R \quad (2\pi R\text{ は円周、つまり閉区間}\gamma\text{の区間長}) \\ &\leq \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R \\ &\leq \frac{2\pi M}{R} \ \rightarrow \ 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

同様に、2 次以降の項も係数が 0 になる。1 次以降の項の係数がすべて 0 になることで，定数項のみが残り、f は定数関数であることが示される．

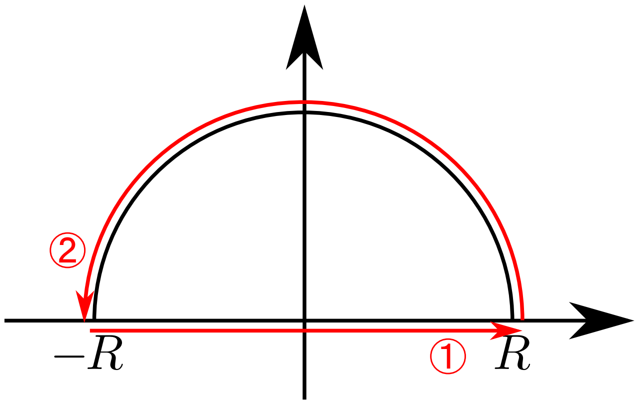
7　曲面論

まず、次の式を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

この答えは $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ である。この計算を複素数の力を借りて考えてみよう。

中心が原点，半径が十分に大きい R の半円を考える．この半円における線積分を考える．図のような半円の経路 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ を設定する．(①が γ_1 に，②が γ_2 にあたる)．



ここで実軸乗の線積分（γ_1）は $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ となり，また半円の円周部の線積分（γ_2）は $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz$ と表される．なお，この和は計算すると

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる．

次に，複素数で定義された関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ を考え，$R \to \infty$ を考えよう．ここで γ 上で $|f(z)| \leq M$ のとき，L を γ の長さとすると以下が成り立つ．

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML$$

この不等式を考慮すると，$\dfrac{z^2}{1+z^4}$ については $M = \dfrac{R^2}{R^4}$ となり半円の円周 πR より，$\dfrac{\pi}{R}$ が得られる．このとき，$R \to \infty$ とすると，$\dfrac{1}{R} \to 0$ となるため，積分路

②（γ_2）が 0 に近づくことがわかる．

以上より，

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

は $R \to \infty$ のとき，左辺の第 2 項が 0 になり，

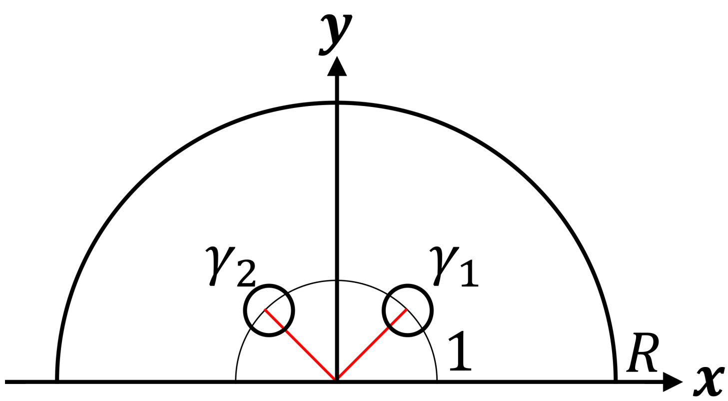
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる．

続いて中心原点，半径が $R\,(>1)$ で示される閉曲線 γ（円）を考える．このとき $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ とし，

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4}dz$$

を計算する。



まずは $1+z^4=0$ となる z を求める．$\theta \in [0,\ \pi]$ とするとき，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると，ド・モアブルの定理より

$$1 + (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = 0$$
$$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = -1$$

$\cos 4\theta = -1$ かつ $\sin 4\theta = 0$ を満たすとき，$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ なので，$z = \dfrac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}$ となる。この 2 点が特異点にあたる．

図のように，特異点のまわりに小さな円 γ_1, γ_2 を考える．$\gamma - \gamma_1 \cup \gamma_2$ の内部では $f(z)$ は正則なので次式が成り立つ．

$$\int_{\gamma-\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = 0$$

この式はすなわち次を示す．

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 \\
\Leftrightarrow &\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz
\end{aligned}$$

ここで、この半円を円と見たとき、特異点はさらに2つ$\left(\theta = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi,\ z = \frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}}\right)$増える。これら特異点を第一象限から順に a_1, a_2, a_3, a_4 とする．上式の右辺の線積分を求めるたい．ここで，分母は次のように変形ができる．

$$1 + z^4 \;=\; (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)$$

これらを用いて式を変形する．したがって、多項式関数の計算（冪級数展開）を用いることで

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} \frac{z^2 dz}{1 + z^4} \\
=&\frac{z^2}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)} \\
=&\frac{1}{z - a_1} \cdot \frac{z^2}{(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)} \\
=&\frac{1}{z - a_1} \cdot \{b_0 + (z - a_1)b_1 + (z - a_1)^2 b_2 + (z - a_1)^3 b_3 + \cdots\} \\
=&\frac{b_0}{z - a_1} + b_1 + b_2(z - a_1) + b_3(z - a_1)^2 + \cdots \\
=&\int_{\gamma_1} \frac{b_0 dz}{z - a_1} + \int_{\gamma_1} b_1 dz + \int_{\gamma_1} b_2(z - a)dz + \int_{\gamma_2} b_3(z - a)^2 dz + \cdots
\end{aligned}$$

という式が導ける。ここで、2項目以降は全て0になることを考え、第1項だけを計算すると

$$\int_{\gamma_1} \frac{b_0 dz}{z - a_1} = b_0 \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - a_1} = 2\pi i b_0$$

である。さらに、$g(z) = b_0 + (z - a_1)b_1 + (z - a_1)^2 b_2 + (z - a_1)^3 b_3 + \cdots$ と考えると

$$g(z) = (z - a_1)f(z)$$

と表すことができ、特に $b_0 = g(a_1)$ となる。以上と同様に、例えば $h(z) = b_0 + (z - a_2)b_1 + (z - a_2)^2 b_2 + (z - a_2)^3 b_3 + \cdots = (z - a_2)f(z) \quad (b_0 = h(a_2))$ などと考えることで、$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ を計算できる。（→レポート課題 **I**）

次の問題は

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0)$$

を考えよう．まず被積分関数は偶関数であるため、題意は

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0)$$

を求めることに等しい。これを複素関数

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} \qquad (a>0)$$

を使って考える。分母が 0 になるとき，$z=\pm ai$ である．したがって，次のように変形できる．

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z^2+a^2)^2} \;=\; \frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

ここで，$\dfrac{1}{(z+ai)^2}$ については以下のように冪級数に展開ができる．

$$g(z)=\frac{1}{(z+ai)^2}=b_0+b_1(z-ai)+b_2(z-ai)^2+\cdots$$

となる．これを用いると $f(z)$ は以下のように書き換えられる．

$$f(z) \;=\; \frac{b_0}{(z-ai)^2}+\frac{b_1(z-a_i)}{(z-ai)^2}+\frac{b_2(z-a_i)^2}{(z-ai)^2}+\cdots$$

これを計算すると，

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_1} f(z)dz\\ &=\int_{\gamma_1}\frac{b_0}{(z-a_i)^2}dz+\underline{\int_{\gamma_1}\frac{b_1}{z-a_i}}+\int_{\gamma_1} b_2dz+\int_{\gamma_1} b_3(z-a_i)dz+\cdots\end{aligned}$$

ここで，下線が引かれていない全ての項には原始関数が含まれているため，全て値が 0 になる．残った下線部の項については $2\pi i b_1$ という値が求められる．なお，関数 $g(z)$ を微分することで，残る項を調整することができる．例えば b_1 を求めたければ $g(z)$ を 1 階微分すればよい．(→**レポート課題 II**)

$$g'(z) \;=\; b_1+2b_2(z-ai)$$

§ 今週のレポート課題

I.

原点が中心で、十分に大きい半径 R をもつ半円において

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4}dz$$

を計算し、答えが $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ になることを確かめよ

II.

原点が中心で、十分に大きい半径 R をもつ半円において

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0)$$

を計算し、答えが $\dfrac{\pi}{2a^3}$ になることを確かめよ