2018年度 情報数学III

情報数学III講義（第5回）

平成30年11月14日

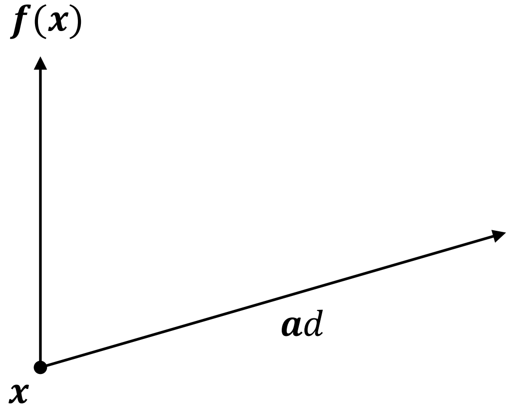
2.11　1次の交代形式

$\mathbb{R}^3$空間において,$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の線形写像を考える．$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ であることを考えると,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{a}) &= \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + a_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + a_3\varphi(\boldsymbol{e}_3) \\
\varphi &= \varphi(\boldsymbol{e}_1)dx + \varphi(\boldsymbol{e}_2)dy + \varphi(\boldsymbol{e}_3)dz
\end{aligned}$$

と表される．ここで dx, dy, dz は基底と考えることができる．この意味は次のとおりに解釈できる．

力の場について考える.



点 $\boldsymbol{x}$ で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, $\boldsymbol{x}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}d$$

である．（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.）

ここで $\varphi : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}$ を考える．これは $\mathbb{R}^3$から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．φ は線形性, 交代性（引数を入れ替えると符号が変わる）をもつため **1 次の交代形式**と呼ばれる．空間の各点に 1 次の交代形式を対応させる写像を **1 次の微分形式**と呼ぶ．空間の各点にベクトル場を対応させる写像をベクトル場と呼ぶ．1 次の交代形式の全体は線形空間（3 次元）をなす．

ここで，dx, dy, dz を基底とした線形写像 ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x,\ dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y,\ dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

を考えると，任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

と 1 次の交代形式

$$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$$

は対応している．同様に，ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x, y, z)\boldsymbol{e}_1 + f_2(x, y, z)\boldsymbol{e}_2 + f_3(x, y, z)\boldsymbol{e}_3$$

と 1 次の微分形式

$$f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$$

は対応している．

また，線積分の式を 1 次の微分形式 ω を用いて表すと

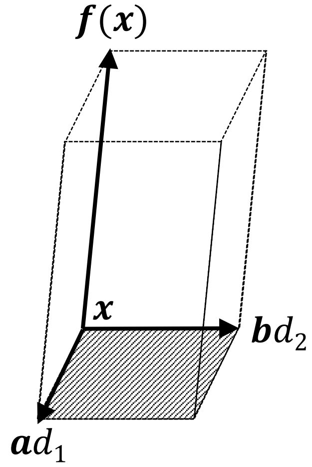
$$\begin{aligned} &\int_r \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt'(a_i) d_i \\ \Rightarrow &\int_r \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

となる．

2.12　2 次の交代形式

流れの場（例えば水の流れ）について考える．点 $\boldsymbol{x}$ での流れは, $\boldsymbol{x}$ を起点として 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}d_1, \boldsymbol{b}d_2$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい．（ただし $d_1, d_2 \in D,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.）このとき求める体積は次のようになる（ただし θ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面と $\boldsymbol{f}$ の角度）:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a}d_1 \times \boldsymbol{b}d_2) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))\, d_1 d_2$$



ここで先ほどと同様に $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を考える．これは $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．外積は二重線形性, 交代性をもつため, これを **2 次の交代形式**という．空間の各点に 2 次の交代形式を対応させたものを **2 次の微分形式**と呼ぶ．2 次の交代形式の全体は線形空間（3 次元）をなす．

ここで，以下のくさび形積 ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$dy \wedge dz : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

を考えると，任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

と 2 次の交代形式

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

は対応している．

同様に，ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x, y, z)\boldsymbol{e}_1 + f_2(x, y, z)\boldsymbol{e}_2 + f_3(x, y, z)\boldsymbol{e}_3$$

と2次の微分形式

$$f_1(x,y,z)dy\wedge dz+f_2(x,y,z)dz\wedge dx+f_3(x,y,z)dx\wedge dy$$

は対応している．

また面積分の式を2次の微分形式ωを用いて表すと次のようになる．

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_b^{b'}\int_a^{a'}\boldsymbol{f}\left(\Sigma(s,t)\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s,t)\right)dsdt\\ \Rightarrow&\iint_\Sigma \omega=\int_b^{b'}\int_a^{a'}\omega\left(\Sigma(s,t)\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s,t)\right)dsdt\end{aligned}$$

§ **3** 次の交代形式

1次，2次と同様に，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\mapsto\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$において，任意のベクトルを入れ替えても線型となる場合，これを三重線形といい，また任意のベクトルを入れ替えて符号が変わる場合，交代性を持つという．

3　積分定理のまとめ

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$，ベクトル場$\boldsymbol{f}=\mathrm{grad}\ \varphi$とする曲線において，点$\gamma(a)$から$\gamma(b)$に向かう道のり$\gamma$において

$$\int_\gamma(\mathrm{grad}\varphi)d\boldsymbol{r}=\varphi(\gamma(\boldsymbol{b})-\varphi(\gamma(\boldsymbol{a}))$$

と表すことができる．上式について，左辺を線積分と考えるならば，右辺は点積分（実際にそんな言葉はないが）と考えることができる．

また，閉曲線γを縁（境界）とする曲面σに対してベクトル場$\boldsymbol{f}$があるとき，

$$\int_\sigma(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S}=\int_\gamma\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表すことができる（Stokesの定理）．上式について，左辺を面積分と考えるならば，右辺は線積分と考えることができる．

さらに，閉曲面σで囲まれた領域Ωに対してベクトル場$\boldsymbol{f}$があるとき

$$\int_\Omega(\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV=\int_\sigma\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$$

と表すことができる（Gaussの発散定理）．上式について，左辺を体積分と考えるならば，右辺は面積分と考えることができる．

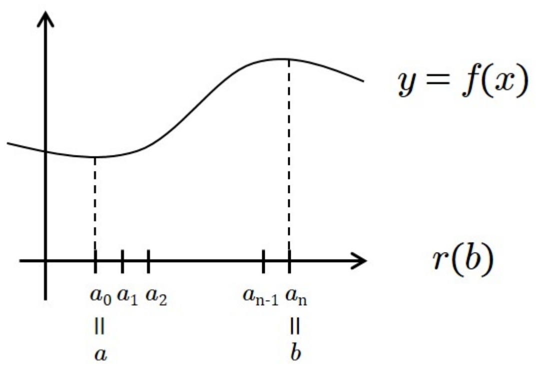
§ 復習：微積分学の基本定理

次を微積分学の基本定理と呼ぶ.

> 微積分学の基本定理
>
> $F' = f$ とする. このとき次が成り立つ.
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

我々がここで主張したいのは, 基本定理が無限小レベルで成立すると仮定を置くとそこから一般の基本定理が導けるということである. この「仮定」とは第一回の授業で導入した Kock-Lawvere の公理にほかならない.

下図のように区間 $[a,b]$ を, 任意の i について $a_{i+1} - a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する.



このとき分割した細長い領域の面積をそれぞれ求めてから足し合わせても結果は変わらないため, 次が成り立つ.

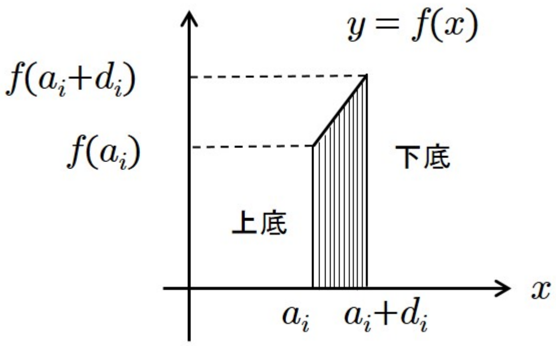
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

さて, ここで上式の右辺において i を固定して考える. 任意の i について $a_{i+1} - a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間に分けてあるため, 当然この i についてもそれが成り立つ. したがって Kock-Lawver の公理より f は微小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ において直線となる.（下図参照. なお, $d_i := a_{i+1} - a_i$ としている.）

求める斜線部分は台形であり, 台形の面積公式は (上底)+(下底)×(高さ)/2 なので, 求める面積は

$$\frac{1}{2}d_i(f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d_i) = f(a_i)d_i$$

となる. つまりこの台形の面積は, 実はタテが $f(a_i)$ でヨコが d_i の長方形の面積と等しいということを示している. ここからただちに無限小レベルでの基本定理, すなわち任意の i



に対し

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

が言える.

いま「Kock-Lawvere の公理を認める ⇒ 無限小レベルでの基本定理が成り立つ」を示した. 最後に「無限小レベルでの基本定理が成り立つ ⇒ 基本定理が一般にも成り立つ」を示そう. こちらは以下のような式変形より導ける.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{i-0}^{n-1}(F(a_{i+1}) - F(a_i)) \\
&= (F(a_1) - F(a_0)) + (F(a_2) - F(a_1)) + \cdots \\
&= F(a_n) - F(a_0) \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

この証明の意味するところは,「無限小の区間において，微積分学の基本定理が成り立つように微分を決めてある」ということである.

3.1 Stokes の定理

次の定理を **Stokes の定理**という.

Stokes の定理

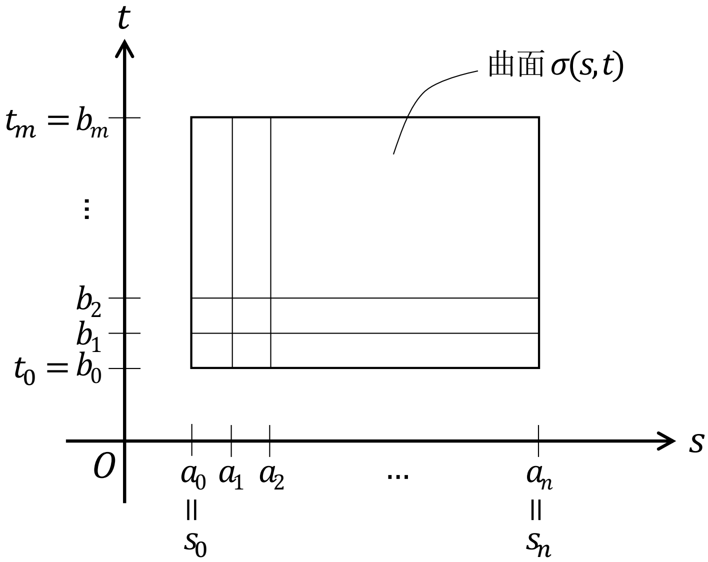
閉曲線 γ を境界とする曲面 σ に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ.

$$\int_\sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S} = \int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

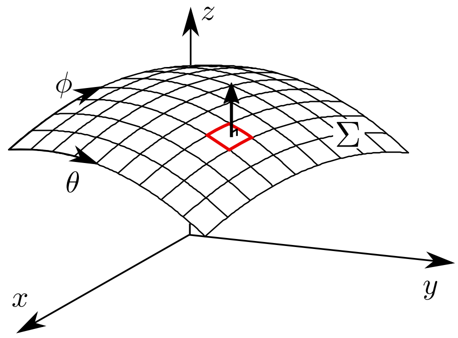
ベクトル場として，曲面 $\sigma[a,a']\times[b,b']\to\mathbb{R}^3$ について，次のような図を考える．この微小曲面が曲面 σ に $n\times m$ 個，広がっていた場合，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\sigma_{ij}}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\gamma_{ij}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\gamma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表される．

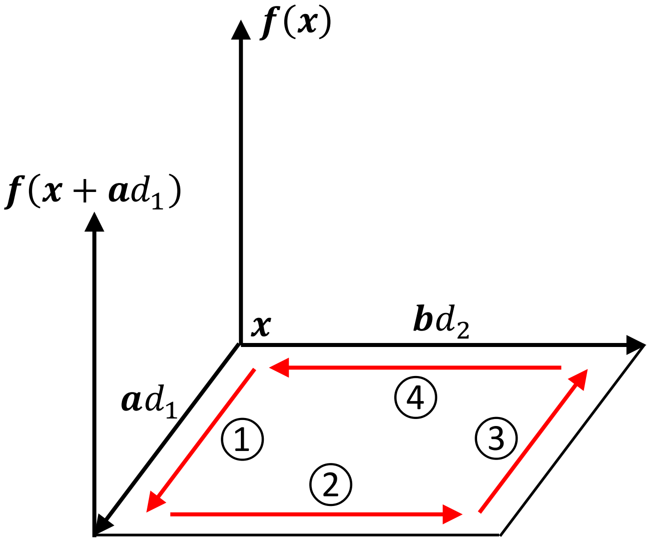


これは，閉曲線 γ で囲まれる曲面 σ について，曲面を細分して考えたとき，
細分した微小な領域 σ_{ij} に対しての線積分を図で見てみると，隣の領域との接している辺に関する線積分が相殺されることがわかる．これを加え合わせると，打ち消し合わない縁の部分が残り，境界 γ のみが出てくる．したがって一般の場合にも定理が成り立つことがわかる．これは微積分学の基本定理と同じ論法である．



ここで，基本定理のときと同じように無限小のレベルで定理が成立するよう $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を定義する．
まず閉曲線 γ について線積分を行う向きを決める．積分は向きを逆にすると符号が逆になってしまうからである．ここでは曲面に対し旗を立てたとき，常に左手方向に旗が見えるように進む方向（図に見える側を表とした場合，表側から見て反時計回り）を正とした．

点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が張る空間と，ベクトル場 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルで Stokes の定理が成り立つように $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1, d_2 \in D$ を導入する．



定理の右辺（線積分）について計算する．2 つのベクトルで張られる曲面は平行四辺形であるため，図のように 4 つに分けられる．それぞれの線積分を計算すると以下のようになる．

$$\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}d_1}_{①} + \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1) \cdot \boldsymbol{b}d_2}_{②} - \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2) \cdot \boldsymbol{a}d_1}_{③} - \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{b}d_2}_{④}$$

上式より，②と④を $\boldsymbol{b}d_2$ でまとめ，①と③を $\boldsymbol{a}d_1$ でまとめると，

$$\begin{aligned} &= \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\} \cdot \boldsymbol{b}d_2 - \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\} \cdot \boldsymbol{a}d_1 \\ &= \left\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}\right\} d_1 d_2 \end{aligned}$$

この，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ を $\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と表す（$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）．
ここで $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$\varphi(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = -\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

となり，交代性を持つことがわかる．また，

$$\begin{aligned} &\varphi(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}) \\ &\quad= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}) \\ &\quad= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_1}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a_1} \\ &\qquad+ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_2}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a_2} \\ &\quad= \varphi(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b}) + \varphi(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

となるので，二重線形性を持つことがわかり，φ が 2 次の交代形式であることがわかる．2 次の交代形式全体は 3 次元の線形空間で

$$\varphi = \alpha_1(dy \wedge dz) + \alpha_2(dz \wedge dx) + \alpha_3(dx \wedge dy)$$

と表される．ここで，例えば $\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を計算すると, $dy \wedge dz = 1$, $dz \wedge dx = dx \wedge dy = 0$ となり，同様に $\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)$ を計算すると, $dz \wedge dx = 1$, $dy \wedge dz = dx \wedge dy = 0$，$\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を計算すると, $dx \wedge dy = 1$, $dy \wedge dz = dz \wedge dx = 0$ となり，それぞれにおいて α_1,α_2,α_3 を算出できる．

それでは，$\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を計算してみよう．

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

ここで，微分の定義から

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)d \qquad\qquad (d \in D) \\
&= \boldsymbol{f}(\underbrace{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2 d}_{\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

であり，y 成分だけ残ることになるため，

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)d = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x})d$$

と考えることができる．これを $\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ に当てはめると

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_2 \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_3 - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

さらに，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$（$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）を考えると，

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_3 - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_2 \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる．同様に $\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)$,$\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ を計算しまとめると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g} &= (\varphi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3),\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1),\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)) \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right)\end{aligned}$$

この $\boldsymbol{g}$ を $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ と定義する．

なお，この $\boldsymbol{g}$ の各成分の係数は作用素 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いて，ベクトル積 $\nabla\times\boldsymbol{f}$ によって導かれる．

$$\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{f} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & f_2\\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & f_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & f_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & f_1\\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.2 発散定理

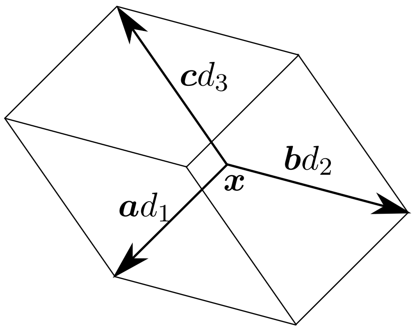
次の定理を**ガウスの発散定理**という．

ガウスの発散定理

閉曲面 σ を境界とする領域 Ω に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_{\Omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV \;=\; \int_{\sigma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$$

先ほどと全く同じ要領で進める．点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が張る平行六面体と，ベクトル場 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルでガウスの発散定理が成り立つように $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1,d_2,d_3\in D$ を導入する．



定理の左辺（面積分）について計算する．合計で 6 つの面を考えなければならないので，向きに注意する．すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\quad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
=\;&\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\}\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\quad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})d_3}\}\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
=\;&\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}d_1d_2d_3
\end{aligned}$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （$\varphi=\alpha dx\wedge dy\wedge dz(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$）とおいて考える．（**レポート課題 IV.**）

§ 今週のレポート課題

I.

3 次の交代形式の全体において，$dx \wedge dy \wedge dz$ が基底であることを示せ．

II.

$\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の線形写像について，

$$(\varphi \wedge \psi)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a})$$

と定義する．$\varphi \wedge \psi$ が 2 次の交代形式であることを示せ．

III.

$\varphi, \psi, \chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の線形写像について，

$$\begin{aligned}
&(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
&= \varphi(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{b})\chi(\boldsymbol{c}) + \varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{c})\chi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{c})\psi(\boldsymbol{a})\chi(\boldsymbol{b}) \\
&- \varphi(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{c})\chi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{c})\psi(\boldsymbol{b})\chi(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a})\chi(\boldsymbol{c})
\end{aligned}$$

と定義する．$\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ が 3 次の交代形式であることを示せ．

IV.

ガウスの発散定理を証明せよ．