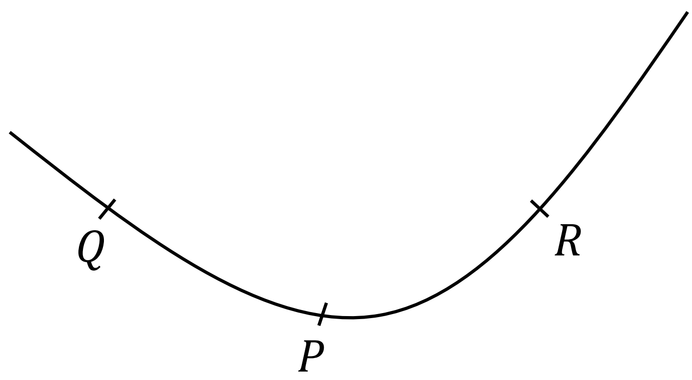
2018年度 情報数学III

情報数学III講義（第10回）

平成30年12月26日

7.2　曲線と曲面

まずは以下の曲線について考える．



ここでこの曲線上の3点 $P,\ Q,\ R$ について，3点を通る円を定めることができる．また Q と R を P にどんどん近づけることで，極限として得られる円が存在する．この極限の円について以下の値を定義する．

- 曲率円（circle of curvature）: 極限として得られる円
- 曲率中心（center of curvature）: 極限として得られた円の中心
- 曲率半径（radius of curvature）: 極限として得られた円の半径

また，曲率半径の逆数を曲率（curvature）という．すなわち $\text{曲率} = \dfrac{1}{\text{曲率半径}}$ である．曲率とは円の曲がり具合を指し，曲率が大きいほど（半径が小さいほど）急な円（急な曲がり具合）ということになる．例えば，半径 r の円について，曲率円は円そのものであり，曲率は $\dfrac{1}{r}$ である．また直線を考えると，曲率半径は ∞（つまり曲率は0）になる．

もう少し実際的な例を考える．放物線 $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$ の，原点 $(0,\ 0)$ における曲率円を考える．3 点 $(0,\ 0),\ (\epsilon,\ a\epsilon^2),\ (-\epsilon,\ a\epsilon^2)$ を通る円を決定すると，この円の中心を $(\alpha,\ \beta)$，半径を r とするとき，

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

となる．また 3 点を代入した式は次の通り．

$$(-\alpha)^2 + (-\beta)^2 = r^2 \tag{1}$$
$$(\epsilon-\alpha)^2 + (a\epsilon^2-\beta)^2 = r^2 \tag{2}$$
$$(-\epsilon-\alpha)^2 + (a\epsilon^2-\beta)^2 = r^2 \tag{3}$$

式 (1)〜(3) の連立方程式を解くと

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \frac{1+a^2\epsilon^2}{2a}$$
$$r = \frac{1+a^2\epsilon^2}{2a}$$

となる．ここで ϵ を 0 に近づけて極限を取ると，$\beta = r = \dfrac{1}{2a}$ となり，曲率円が

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

と求められる．(→**レポート課題 I**)

さて，円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ について，x の値が分かったならば y の値は $\pm\sqrt{1-x^2}$ で求められるが，場合分けもあり少々面倒である．そこで $x = \cos t,\ y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ とするパラメータ表示を用いて考える．

ここで，曲線 C を $C : [a,\ b]$ (閉区間) $= I \to \mathbb{R}^2$ と定義し，端点を $C(a),\ C(b)$ とする（それぞれ始点，終点）．また，$C'(t) = (x'(t),\ y'(t))$ を接ベクトル（tangent vector）といい，$\forall t \in I$ について $C'(t) \neq 0$ が言えるとき，この曲線 C を正則曲線（regular curve）という．以下に例を示す．

1. $C(t) = (t,\ t^2)$:
   $C'(t) = (1,\ 2t) \neq (0,\ 0)$ より C は正則曲線

2. $C(t) = (t^2,\ t^3)$:
   $C'(t) = (2t,\ 3t^2)$．これは $C(0) = (0,\ 0)$ より C は正則曲線ではない

3. $C(t) = (t^2,\ t^4)$:
   $C'(t) = (2t,\ 4t^3)$. これは $C(0) = (0,\ 0)$ より C は正則曲線ではない

さらに，正則曲線において弧長パラメータを定義する．曲線 $C(t) = (x(t),\ y(t))$ $(t \in I)$ において，$S_1,\ S_2 \in I$ であり，かつ $||C'(t) = 1||$ であるとき，$C(S_1)$ から $C(S_2)$ までの曲線 C の長さは

$$\int_{S_1}^{S_2} ||C'(S)||dS = S_2 - S_1$$

と表される．

加えて正則曲線では，パラメータを取り替えることもできる．曲線 $C(t) = (x(t),\ y(t))$ $(t \in I)$ において $t = t(u)$ $(u \in J)$ を考えると，任意の $u \in J$ について，$t'(u) \neq 0$ であるとき

$$\tilde{C}(u) = C(t(u)),\quad \tilde{C}'(u) = C'(t(u)),\quad t'(u) \neq 0$$

となる．
ここで，$\forall u \in J$ において $t'(u) > 0$ もしくは $t'(u) < 0$ としかならないため，C と $\tilde{C}$ は同じ向き（$t'(u) > 0$）か違う向き（$t'(u) < 0$）かを判別することができる．

§ 補題

『任意の正則曲線はパラメータの取り替えで弧長パラメータをとることができる』を証明してみよう．

Proof.
曲線 $C(t)$ $t \in [a,\ b]$ において，$S(t) = \int_a^t ||C'(t)||dt$ とおく．
$C'(t) \neq 0$ なので $\dfrac{dS}{dt} = ||C'(t)|| > 0$ である．
ここで逆関数の定理により，$t = t(S)$ であり，
$\tilde{C}(S) = C(t(S))$
$\tilde{C}'(S) = C'(t(S))t'(S)$
$||\tilde{C}'(S)|| = ||C'(t(S))||t'(S) = ||C'(t(S))|| \cdot \dfrac{1}{|C'(t(S))|} = 1$ □

この補題により,『「曲線」とは「弧長パラメータをもつ正則曲線」を言う』という約束が成り立つ．

さらに曲線 $C(S)$ に対して，$\{\boldsymbol{e}_1(S),\ \boldsymbol{e}_2(S)\}_{S\in I}$ とするとき，

1. $\boldsymbol{e}_1(S) = C'(S)$

2. $\boldsymbol{e}_2(S)$ は $\boldsymbol{e}_1(S)$ を反時計回りに 90 度 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ だけ回転させたベクトル

が成り立つベクトル $\boldsymbol{e}_1(S)$, $\boldsymbol{e}_2(S)$ を動標構（moving frame）と呼ぶ．動標構について $||\boldsymbol{e}_1(S)||^2 = 1$ が成り立つとき，$\boldsymbol{e}_1(S) \cdot \boldsymbol{e}_1(S) = 1$ であるが，この両辺を S で微分すると，$2\boldsymbol{e}_1(S) \cdot \boldsymbol{e}_1'(S) = 0$ となり，$\boldsymbol{e}_1(S)$ と $\boldsymbol{e}_1'(S)$ は直交することが分かる．このとき，

$$\boldsymbol{e}_1'(S) = k(S)\boldsymbol{e}_2(S)$$

と表すときの $k(S)$ を曲率という．

ここで，命題『曲線 $C(S) = C(S_0) + (S - S_0)\boldsymbol{e}_1(S_0) + \frac{1}{2}(S - S_0)^2 k(S_0)\boldsymbol{e}_2(S) + O((S - S_0)^3)$』を示す．

Proof.
$C'(S_0) = \boldsymbol{e}_1(S_0)$
$C''(S_0) = \boldsymbol{e}_1'(S_0) = k(S_0)e_2(S_0)$
以下，テイラー展開により同様 □

また，フルネ—セレの公式というものが以下に示される通りにある．

$$\frac{d}{dS}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k \\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1'(S) = k(S)\boldsymbol{e}_2(S) \\ \boldsymbol{e}_2'(S) = -k(S)\boldsymbol{e}_1(S) \end{cases}$$

さらに次の定理が言える．

A. 任意の与えられた C^∞ 級関数 $k(S)$ に対して，曲率が $k(S)$ であるような平面上の曲線が存在する

B. このような曲線は平面 $(\mathbb{R}^2)$ の回転と平行移動の自由度を除いて一意である

7.3 曲率の幾何学的意味

2 つの平面曲線 $C(S)$ と $\overline{C}(S)$ があり，それぞれの曲率を $k(S)$, $\overline{k}(S)$ とする．このとき，次の 2 つは同値である．

1. $k(S) = \overline{k}(S)$

2. いくつかの回転と平行移動の合成で表される変換 T が存在し，$T(C(S)) = C(S)$ となる

Proof.
(1) $\Rightarrow$ (2) :
上述の定理 B より示される

(2) $\Rightarrow$ (1) :

(a) $C(S) = C(S_0) + (S - S_0)\boldsymbol{e}_1(S_0) + \dfrac{1}{2}(S - S_0)^2 k(S_0)\boldsymbol{e}_2(S) + O((S - S_0)^3)$

(b) $\overline{C}(S) = \overline{C}(S_0) + (S - S_0)\overline{\boldsymbol{e}}_1(S_0) + \dfrac{1}{2}(S - S_0)^2 \overline{k}(S_0)\overline{\boldsymbol{e}_2}(S) + O((S - S_0)^3)$

以上 2 本の式 $(a), (b)$ より，
$T(C(S)) = T(C(S_0)) + (S - S_0)T(\boldsymbol{e}_1(S_0)) + \dfrac{1}{2}(S - S_0)^2 k(S_0)T(\boldsymbol{e}_2(S_0)) + O((S - S_0)^3)$
と表す．さらに，$T(C(S)) = \overline{C}(S),\ T(C(S_0)) = \overline{C}(S_0)$ とすると，
$T(\boldsymbol{e}_1(S)) = T(C'(S)) = (T(C(S)))' = (\overline{C}(S))' = \boldsymbol{e}_1(S),\ \ T(\boldsymbol{e}_2(S)) = \overline{\boldsymbol{e}_2}(S)$ より
$\overline{C}(S) = \overline{C}(S_0) + (S - S_0)\overline{\boldsymbol{e}_1}(S_0) + \dfrac{1}{2}(S - S_0)^2 k(S_0)\overline{\boldsymbol{e}_2}(S_0) + O((S - S_0)^3)$ となり
$k(S) = \overline{k}(S)$ □

最後に，ここまで定義してきた曲率について，2 つの定義が一致することを確かめる．

Proof.
まず
$C(S) = C(S_0) + (S - S_0)\boldsymbol{e}_1(S_0) + \dfrac{1}{2}(S - S_0)^2 k(S_0)\boldsymbol{e}_2(S) + O((S - S_0)^3)$
において，回転と平行移動により，
$C(S_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_1(S_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_2(S_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
としてもよい．この状態で『この曲線は $x = 0$ の近くで $y = \dfrac{1}{2}k(S_0)x^2 + O(x^3)$ と表される』ことを利用する．つまり，$k(S_0) = \dfrac{1}{S = S_0\text{における曲率半径}}$ であることを示せば良い．
$k(S_0) \neq 0$ でない場合，点 $(S_0) = (0,\ 0)$ における曲率円を求める．
3 点 $(0,\ 0)$, $\left(\epsilon,\ \dfrac{1}{2}k(S_0)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right)$, $\left(-\epsilon,\ \dfrac{1}{2}k(S_0)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right)$ を通る円を考えると
この曲率円は
$x^2 + \left(y - \dfrac{k(S_0)^2\epsilon^2 + 4}{4k(S_0)} + O(\epsilon^3)\right)^2 = \left(\dfrac{k(S_0)^2\epsilon^2 + 4}{4k(S_0)} + O(\epsilon^3)\right)^2$
となる.$\epsilon \to 0$ において，曲率半径は $\dfrac{1}{k(S_0)}$ と表される．

さらに上述の,『この曲線は $x=0$ の近くで $y=\dfrac{1}{2}k(S_0)x^2+O(x^3)$ と表される』を示す.
$x'(S_0)=1\neq 0,\ S=S_0$の近くで $x(S)$ の逆関数を $S=S(x)$ とおく. ここで
$x(S)=(S-S_0)+f(S),\quad S(x)-S_0=x+g(x)$
において, $g(0)=g'(0)=0$ であることを示せば十分である. なお,
$f(S_0)=f'(S_0)=f''(S_0)=0$ である.
$g(x)=O(x^2)$ を示すには, $f(S)=O((x-x_0)^3)$ から, $S(x)$ およびその逆関数 $x(S)$ をそれぞれ s,x で微分すると良い.
$x'(S_0)=1+f'(S_0),\quad S'(0)=1+g'(0)$
より, $S'(0)=\dfrac{1}{x'(S_0)}=1$ であり, $S(x)-S_0=x+O(x^2)$ である. □

§ 今週のレポート課題

I.

$y = ax^4 \quad (a \neq 0)$ について，原点 $(0,\ 0)$ における曲率円を求め，
その方程式が $y = 0$（曲率が 0）になることを確かめよ

今回のレポート提出について

- 期日：2019 年 1 月 7 日（月）
- 提出場所：理学系事務室（自然 B 棟 2 階）のレポート BOX