



2018年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2018
URL	http://hdl.handle.net/2241/00153468

情報数学III講義（第9回）

平成30年12月19日

§ 前回の復習

半径 $R(> 1)$ の半円 γ_R の線積分

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz$$

を考える. この答えが $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ になることを確かめよう. x 軸上の経路を γ_R^1 , 半円周上の経路を γ_R^2 とする.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= \int_{\gamma_R^1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{z^2}{1+z^4} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ここで, 右辺第2項が0になるのは,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| &\leq MX (M \text{ は } f(x) \text{ の上界, } X \text{ は曲線 } \gamma \text{ の長さ}) \\ &= \frac{R^2}{R^4-1} \times \pi R = \pi \cdot \frac{R^3}{R^4-1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

によるものである.

(上界の求め方)

$$\left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| = \frac{|z^2|}{|1+z^4|}$$

であり、 $z^4 = (1 + z^4) - 1$ と考えると

$$|z^4| \leq |1 + z^4| + 1 \Leftrightarrow |z^4| - 1 \leq |1 + z^4| \Leftrightarrow R^4 - 1 \leq |1 + z^4|$$

となる。したがって

$$\frac{|z^2|}{|1 + z^4|} \leq \frac{R^2}{R^4 - 1}$$

7.1 練習問題

様々な線積分を求めてみよう。

まずは

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

を求める。偶関数であることを利用すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx \\ &= \int_{\gamma_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = \int_{\gamma_R^1} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz \end{aligned}$$

である。第1項は $\int_{-R}^R \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$ に等しい。(→レポート課題I)

続いて

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad (a > 0)$$

を求めよう。

このとき、 $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと、逆数は $\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ となる。これらは指数法則が成り立つため、 $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$ となることがわかる。また、この2つを足して割ると以下の式が得られる。

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ここで、 $\frac{dz}{d\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta)$ から $d\theta = \frac{dz}{iz}$ であるため、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \int_C \frac{1}{a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \end{aligned}$$

と変形できる。(→レポート課題 II)

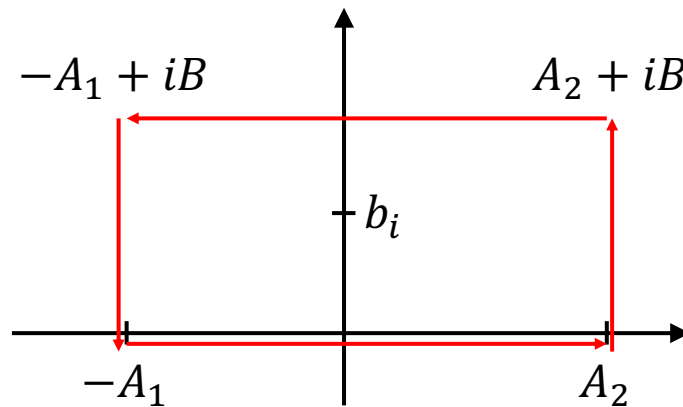
さらに別の式を見てみよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a, b > 0)$$

複素数に置き換えて

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz$$

これを以下の図にして考える。



$z = \pm bi$ は特異点である。 $B > \sqrt{2}b$ であるとき、

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz \\ &= \left(\int_{S[-A_1, A_2]} + \int_{S[A_2, A_2+iB]} + \int_{S[A_2+iB, -A_1+iB]} + \int_{S[-A_1+iB, -A_1]} \right) \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = \frac{ze^{iaz}}{(z + bi)(z - bi)} = \frac{1}{z - bi} \cdot \frac{ze^{iaz}}{z + bi}$$

であり、 $g(z) = \frac{ze^{iaz}}{z + bi}$ とおくと、 $g(bi) = \frac{e^{-ab}}{2}$ である。これより、

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S[-A_1, A_2]} + \int_{S[A_2, A_2+iB]} + \int_{S[A_2+iB, -A_1+iB]} + \int_{[-A_1+iB, -A_1]} \right) \frac{z^{iaz}}{z^2 + b^2} dz \\ &= 2\pi i \cdot g(bi) \\ &= \pi i e^{-ab} \end{aligned}$$

である。

この計算の中身について見てみる。長方形の縦の辺（虚軸に平行な辺） $S[A_k, A_k + iB]$ ($k = 1, 2$) について,

$$\frac{2}{A_k} \left[-\frac{1}{a} e^{-ay} \right]_0^B = 2 \frac{1 - e^{-ab}}{aA_k} \leq \frac{2}{aA_k}$$

であり、長方形の横の辺（実軸に平行な辺）について

$$\left| \frac{ze^{-iaz}}{z^2 + b^2} \right| \leq \frac{|z|e^{-ay}}{|z|^2 - b^2} \leq 2 \frac{e^{-ay}}{|z|} \quad (y \text{ は } z \text{ の像}) \leq 2 \frac{e^{-aB}}{B}$$

であることから,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[-A, A_2]} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz - \pi i e^{-ab} \right| \\ & \leq \frac{2}{a} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + 2 \frac{(A_1 + A_2)e^{-ab}}{B} \end{aligned}$$

ここで、 B, A_1, A_2 の順に無限大に持っていくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = \pi i e^{-ab}$$

が求められる。両辺の虚部を取ると,

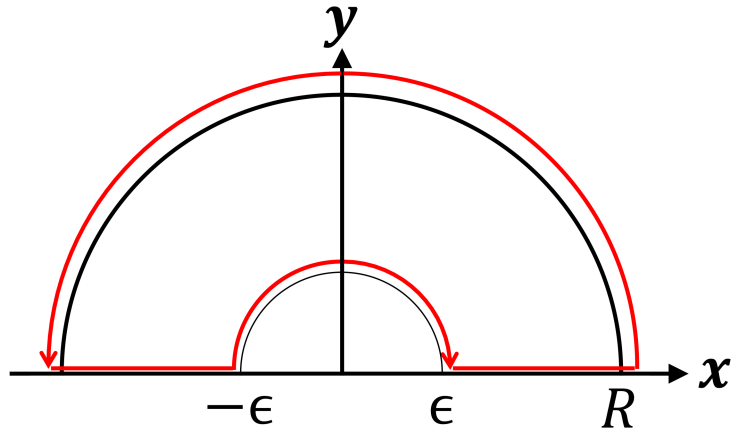
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-ab}$$

となる。(→レポート課題 III)

他にも以下のような式も計算できる。

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} \quad (\lambda \text{ は正の実数})$$

ここでは $\left(\int_{S[-R, -\epsilon]} - \int_{C^+(0, \epsilon)} + \int_{S[\epsilon, R]} + \int_{C^+(0, R)} \right) \frac{e^{i\lambda z}}{z} dz = 0$ (C^+ は上円を示す) を用いる (下図参照)。



(参考計算)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C^+(0, \epsilon)} \frac{e^{i\lambda z}}{z} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C^+(0, \epsilon)} \frac{dz}{z} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\pi i d\theta = \pi i \text{ より} \\
 & \left| \int_{C^+(0, R)} \frac{e^{i\lambda z}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

ここで、 $\sin \theta > \frac{2}{\pi} \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) が満たされる (Jordan の不等式).
 さらに、 $R \rightarrow +\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C^+(0, R)} \frac{e^{i\lambda z}}{z} dz \right| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} \lambda R \theta} d\theta \\
 &= \frac{\pi(1 - e^{-\lambda R})}{\lambda R} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

である.

§ 今週のレポート課題

I.

次の線積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$$

II.

次の線積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad (a > 1) \quad \left(\text{ヒント: 答えは } \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \text{ になる} \right)$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + 3 \cos^2 \theta)^2}$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(p^2 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta)} \quad (p > q > 0)$$

III.

次の線積分を計算せよ.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$$