

152. 扇形内・扇形間における直線移動の距離とその応用

Average Euclidean distance between two random points in sectors and its applications

堀 龍一*, 小林隆史**, 高原 勇***, 大澤義明****

Ryuichi HORI, Takafumi KOBAYASHII, Isamu TAKAHARA and Yoshiaki OHSAWA

The purpose of this paper is to derive the analytical form of the average and variance on the Euclidean distances between two points which are uniformly and independently distributed within a sector through Crofton's formula on geometrical probability. We have extended the existing works on a circle this is because our results also include the one of circles. In addition, we also obtain theoretically the average random Euclidean distances between two sectors. Furthermore, we demonstrate that the approximation formula derived by Koshizuka and Kurita are very efficient by comparing our theoretical results on sectors. We reveal that mobile facilities are effective in order to secure stable supply of energy in the event of a disaster by use of our analytical findings.

Keywords : Sector, Euclidean distance, Crofton's formula, Mobile facility

扇形, 直線距離, クロフトンの微分方程式, 移動施設

1. はじめに

都市生活において人や物は集積場所へ向かうため、近郊から中心への方向が動線の基軸となる。そのため、マクロレベルだと東京都市圏で見られる都心を核とする放射状鉄道による扇形駅勢圏、ミクロレベルだと駅を中心とする放射区割りによる扇形街区が発生する。さらには都市の成長や発展過程では同じ土地利用形態が中心から郊外へ延びるため、都心部からくさび形で延びる扇形土地利用が展開される。そのため、扇形ゾーンは都市空間を考える上で基本的な図形の一つとなる。

それを踏まえ、本研究の目的は二つある。第一の目的は理論的貢献にあり、扇形内に一様分布する独立な2点間の直線距離の平均値やその分散を導出することにある。つまり、扇形領域において起点と終点がランダム(一様にかつ独立)に発生するトリップ長に着目するのである。円盤内でランダムに分布する2点間の平均距離の解析表示が求められている¹⁾²⁾³⁾⁴⁾。扇形は特別な場合として円盤を含んでいるため、本研究はこれら既存の結果を拡張している。なお、これらの既存研究では幾何確率分野の古典的結果であるクロフトンの微分方程式¹⁾²⁾³⁾⁴⁾を用いている。円盤では対称性から円周のどの点からも内部への平均距離は同一であり、その特徴を活かした導出がなされている。本研究で扱う扇形の場合は場所毎に円周から内部への距離は異なるが、既存研究と比較するためにも、本研究でもクロフトンの微分方程式を用いた。さらに、扇形内距離という理論的成果を用いて、複数の扇形ゾーンを保有する円形都市において扇形間距離を求める方法も示す。そのため、扇形内の放射・環状移動による距離分布を導出した研究⁵⁾とは、扇形内・扇形間の直線移動による導出という点で異なっている。

現実の交通需要予測や商圈分析では、ゾーン間距離に依

拠する重力モデル、ハフモデル、空間相互作用モデルがよく適用される。著者らが知る限り、領域内2点間平均距離は円盤及び矩形⁶⁾以外の図形では解析的に求められていない。従って、ゾーンという面を連続的に扱っての距離計算は操作上煩雑であり、その代わりにゾーンに代表点を置きゾーン間距離を計算するという集計化が通常行われる。集計化により発生する誤差を小さくするために、各種の近似式が提案されている⁴⁾⁷⁾。これら既存研究における近似式の精度を、本研究で新たに導出した扇形内・扇形間距離の理論値と比較することで確認する。

第二の目的は応用的貢献にある。東日本大震災(2011年3月)、あるいは関東東北豪雨(2015年9月)、熊本地震(2016年4月)などの被災経験から我が国では災害への備えが必要である。特に、財政難から稼働率上昇、迅速対応の観点から被災時だけに利用するようなインフラ整備には国民から理解を得にくいこともあり、平時から使われていることがポイントとなる⁸⁾。その中で、大容量外部電源供給システムを備え、災害時には非常用電源として活用できる燃料電池バスが注目を浴びている。2020年に東京で開催されるオリンピック・パラリンピックでは、100台以上の燃料電池バスが走行する予定である。

そこで、より具体的に第二の目的は、平時では循環バス、被災時では電源支援の役割を果たす燃料電池バスの移動施設としての効率性について論じることにある。円形都市において、駅などの中心地から複数台の循環バスが面的に移動し交通サービスを提供すると想定すれば、各バスが担当する領域形状は扇形になると見なせる。理論的に導いた扇形平均距離の結果を用いて、固定場所からの派遣距離との比較などを通して、被災時における移動施設による電源供給の効率性を求める。

* 正会員 筑波大学社会工学専攻 (University of Tsukuba)

** 正会員 立正大学経済学部 (Rissho University)

*** 正会員 筑波大学未来社会工学センター (University of Tsukuba)

**** 正会員 筑波大学社会工学域 (University of Tsukuba)

2. 扇形内直線移動

2.1 扇形円弧端点からの平均距離

扇形内でランダムに発生する起終点の2点間直線距離の平均値を導出するにあたって、三段階にわたり移動パターンごとに計算する：図1参照。(i) 円弧端点から扇形で自由に動く点までの平均距離 $\mu_0(\alpha)$ を求める。図1左側に示されたように、1点から内部という面への平均距離である。(ii) 最初の結果を用いて円弧上を自由に動く点から扇形全体で自由に動く点までの平均距離 $\mu_1(\beta)$ を求める。図1中央のように、円弧という一次元空間から面への平均距離である。(iii) 最終目的である扇形で自由に動く2点の平均距離 $\mu(\beta)$ を計算する。図1右側に図化したように、面内の平均距離である。なお、これら平均値は確率現象から導出したとも見なせるので、距離の期待値とも言える。

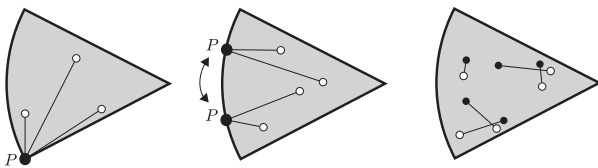


図-1: 三種類の移動パターン

第一段階として、移動パターン(i)では、最初に凸な扇形、すなわち、中心角 α にて $0 \leq \alpha \leq \pi$ を考える。図2左側から、角度 θ に依存して点 P から到達できる距離が変化する。まず、角度区間 $[\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ では、扇形の円弧境界まで到達でき、その長さは $2a \cos \theta$ となる³⁾。角度が $[0, \frac{\pi-\alpha}{2}]$ では、半径までしか到達できない。正弦定理より P から半径までの長さ x は

$$\frac{\sin \alpha}{x} = \frac{\sin(\pi - (\alpha + \theta))}{a}$$

から $x = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} a$ となる。これら二つの場合分けを考慮し、中心角 α の扇形内への総トリップ量が αa^2 であることから、平均距離 $\mu_0(\alpha)$ は次のように表現できる：

$$\mu_0(\alpha) = \frac{2}{\alpha a^2} \left(\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho d\theta + \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\theta)} a} \rho^2 d\rho d\theta \right). \quad (1)$$

なお、被積分関数の ρ^2 は極座標で出現するヤコビアン ρ と点 P からの距離 ρ の積である。

式(1)の括弧内の積分値を $I(\alpha)$ とすると、

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{a^3}{3} \left(8 \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta + \sin^3 \alpha \int_{\alpha}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{a^3}{9} \left(12 \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 6 \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right. \\ &+ 3 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 8 \cos^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 24 \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &+ \left. 12 \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \log \left(\frac{1 + \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right) + 16 \right). \end{aligned}$$

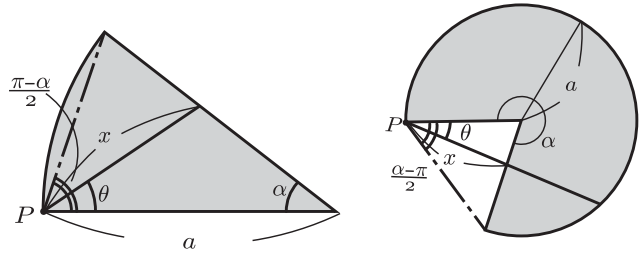


図-2: 2種類の扇形

従って、 $\mu_0(\alpha)$ は簡潔ではないが半角 $\frac{\alpha}{2}$ の関数として解析的に表現できる。

次に、図2右側のような非凸な扇形、 $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ を考える。式(1)にて θ に関する積分範囲は二つの項ともに負の範囲を取るが、 P から半径までの長さ x は、

$$\frac{\sin(2\pi - \alpha)}{x} = \frac{\sin(\pi - \theta - (2\pi - \alpha))}{a}$$

から求まるので、 $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ という状況でも式(1)が成り立つ。

特別な場合として、

$$\mu_0(2\pi) = \mu_0(\pi) = \frac{32}{9\pi} a, \quad \mu_0(0) = \frac{1}{3} a.$$

となり、最初の二つの結果は円盤の期待値¹⁾²⁾³⁾⁴⁾と同じである。また、中心角 α が狭いと扇形は三角形で近似できる。境界点 P から三角形内への距離の確率密度関数は長さ a の三角分布

$$\frac{2}{a^2} (a - x), \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

で求められる。よって、 $\alpha = 0$ のときの結果 $\mu_0(0)$ は、三角分布の期待値 $\int_0^a x \frac{2}{a^2} (a - x) dx$ と一致する。

2.2 円弧からの平均距離

次に第二段階に移り、扇形円弧上と扇形内でそれぞれランダムに発生する2点間の直線距離の平均値 $\mu_1(\beta)$ を導く。扇形の場合は円盤の場合と異なり、円弧上の1点から内部までの平均距離は、円弧上の位置に依存して変動する。そこで、図1中央のように、1点が扇形弧上を移動し変化する平均距離の平均値を計算する。ここで、図3に示すように、中心角 β の扇形を中心角 α の扇形と中心角 $\beta - \alpha$ の扇形の二つに分割する。すると、平均距離 $\mu_1(\beta)$ は、平均距離 $\mu_0(\alpha)$ と平均距離 $\mu_0(\beta - \alpha)$ との扇形面積の重み付けとなる。点 P が長さ βa の円弧で一様分布することは角度 α が区間 $[0, \beta]$ で一様分布することと等価なので、式(1)を用いることで平均距離 $\mu_1(\beta)$ は数学的に次のように表示できる：

$$\begin{aligned} \mu_1(\beta) &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \frac{\alpha}{\beta} \mu_0(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \mu_0(\beta - \alpha) d\alpha \\ &= (2/\beta^2 a^2) \int_0^{\beta} I(\alpha) + I(\beta - \alpha) d\alpha \\ &= (4/\beta^2 a^2) \int_0^{\beta} I(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

この式の積分を求めると、

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta I(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{a^3}{9} \left(4 \sin^5 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 2 \sin^4 \left(\frac{\beta}{2} \right) - \frac{14}{3} \sin^3 \left(\frac{\beta}{2} \right) + 16\beta \right. \\ &+ 2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 30 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) - 2 \log \left(1 + \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) \\ &\left. - 2 \sin^4 \left(\frac{\beta}{2} \right) \left(2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 3 \right) \log \left(\frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

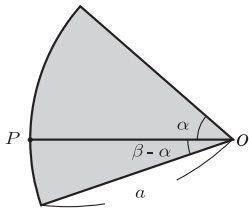


図- 3: 扇形の分割

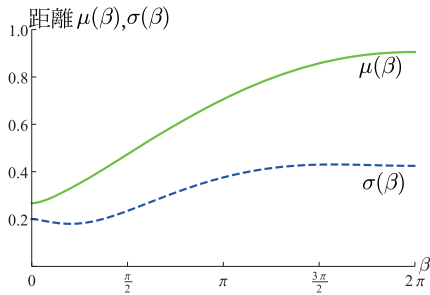


図- 4: 中心角 β と平均距離 $\mu(\beta)$, 標準偏差 $\sigma(\beta)$

2.3 扇形内の平均距離

第三段階に移り、扇形内をランダムに分布する起終点間の直線距離の平均 $\mu(\beta)$ を導く。面積が V の領域にて N 個の点が分布する状況にクロフトンの微分方程式¹⁾²⁾³⁾⁴⁾ を適用すると、次が成り立つ：

$$\frac{d\mu(\beta)}{dV} = \frac{N(\mu_1(\beta) - \mu(\beta))}{V}$$

$V = \frac{\beta}{2} a^2$, $N = 2$, さらに V から a へ変数変換を施すため $\frac{dV}{da} = \beta a$ を代入すると、

$$\frac{d\mu(\beta)}{da} = \frac{4}{a} (\mu_1(\beta) - \mu(\beta)) \quad (5)$$

となる。ここで $\mu(\beta)$ は a に比例することに留意すると、

$$\frac{d\mu(\beta)}{da} = \frac{\mu(\beta)}{a}$$

が成り立つ。これを式 (5) へ代入することで、

$$\mu(\beta) = \frac{4}{5} \mu_1(\beta) \quad (6)$$

が得られる。式 (4) に示すように $\mu_1(\beta)$ は解析的に表現されているので、平均値 $\mu(\beta)$ も解析表示可能となる。

従って、

$$\begin{aligned} \mu(2\pi) &= \frac{128}{45\pi^2}, \quad (\approx 0.905a), \\ \mu(\pi) &= \frac{64}{135\pi^2} (12\pi - 23)a, \quad (\approx 0.706a), \\ \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{128}{135\pi^2} \left(\frac{3 - 94\sqrt{2}}{4} + 12\pi - \frac{3}{2} \log(\sqrt{2} + 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \log 2 \right) a, \quad (\approx 0.474a), \\ \mu\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{288}{135\pi^2} \left(8\pi - \frac{181}{8} - \frac{81}{32} \log 3 + 3 \log 2 \right) a, \\ &\quad (\approx 0.390a), \\ \mu(0) &= \frac{4}{15} a, \quad (\approx 0.267a) \end{aligned}$$

となる。最初の結果は円盤の結果¹⁾²⁾³⁾⁴⁾ と一致し、最後の結果は三角形領域内の 2 点間距離の期待値と一致する。つまり、式 (2) を用いると $\beta = 0$ のときの値は次式でも求められる：

$$\int_0^a \int_0^a |x_1 - x_2| \frac{4}{a^4} (a - x_1)(a - x_2) dx_1 dx_2.$$

以上より、平均距離 $\mu(\beta)$ は $a = 1$ にて、図 4 の実線のようなになる。図から平均距離 $\mu(\beta)$ は中心角 β とともにほぼ直線で増加していることが読み取れる。

2.4 分散

扇形内距離の分散や標準偏差を求めるために、二乗の期待値が必要となる。この期待値も三段階で順次求める。第一段階では、扇形外周点 P から扇形内への二乗距離平均値 $\lambda_0(\alpha)$ を求める。式 (1) と同様な定式化を施すと、

$$\begin{aligned} \lambda_0(\alpha) &= \frac{2}{\alpha a^2} \left(\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\theta)} a} \rho^3 d\rho d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 d\rho d\theta \right). \end{aligned} \quad (7)$$

二乗距離 ρ^2 とヤコビアン ρ との積なので、被積分関数が ρ^2 から ρ^3 と入れ替わったことが式 (1) と異なる。(7) の括弧内を $J(\alpha)$ とし積分すると、

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{a^4}{4} \left(\sin^4 \alpha \int_\alpha^{\frac{\pi+\alpha}{2}} \frac{1}{\sin^4 \theta} d\theta + 16 \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{a^4}{12} \left(9\alpha - 16 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

特別な場合として、

$$\lambda_0(2\pi) = \lambda_0(\pi) = \frac{3}{2} a^2, \quad \lambda_0(0) = \frac{1}{6} a^2.$$

前者は円盤での理論値¹⁾²⁾³⁾⁴⁾と、後者は式(2)で示した三角分布の二乗の期待値 $\int_0^a x^2 \frac{2}{a^2} (a-x) dx$ と一致する。

第二段階では、円弧から内部への距離の二乗の平均値 $\lambda_1(\beta)$ を算出する。式(3)と同様に整理すると、

$$\begin{aligned} \lambda_1(\beta) &= \frac{4}{\beta^2 a^2} \int_0^\beta J(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{32}{9\beta^2} \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) a^2. \end{aligned}$$

最終段階に移り、扇形内々距離の二乗の平均値 $\lambda(\beta)$ をクロフトンの微分方程式から導く。二乗距離 $\lambda(\beta)$ は a^2 に比例するので、

$$\frac{d\lambda(\beta)}{da} = \frac{2\lambda(\beta)}{a}.$$

式(6)を得る同様の手続きを経て、 $\lambda(\beta)$ を次のように得る：

$$\lambda(\beta) = \frac{2}{3} \lambda_1(\beta) = \left(1 - \frac{32}{9\beta^2} \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) a^2. \quad (8)$$

扇形の特別な場合として

$$\begin{aligned} \lambda(2\pi) &= a^2, & (\approx 0.640a^2), \\ \lambda(\pi) &= \left(1 - \frac{32}{9\pi^2} \right) a^2, & (\approx 0.640a^2), \\ \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) a^2, & (\approx 0.279a^2), \\ \lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(1 - \frac{128}{9\pi^2} (2 - \sqrt{2}) \right) a^2, & (\approx 0.156a^2), \\ \lambda(0) &= \frac{1}{9} a^2, & (\approx 0.111a^2). \end{aligned}$$

式(6)から導出される式群と比べて、二乗の期待値は簡潔な形となっている。最初の結果は円盤の値¹⁾²⁾³⁾⁴⁾と、最後の結果は三角形領域内の2点間の距離の二乗の期待値と一致する。よって、 $\beta = 0$ のときの値は、式(2)を用いた次式と一致している：

$$\int_0^a \int_0^a (x_1 - x_2)^2 \frac{4}{a^4} (a - x_1)(a - x_2) dx_1 dx_2.$$

以上より、分散を $v(\beta)$ 、標準偏差を $\sigma(\beta)$ と定義すると、

$$\begin{aligned} v(\beta) &= \lambda(\beta) - (\mu(\beta))^2, \\ \sigma(\beta) &= \sqrt{v(\beta)} = \sqrt{\lambda(\beta) - (\mu(\beta))^2}. \end{aligned}$$

標準偏差 $\sigma(\beta)$ を中心角 β の関数で数値化すると、 $a = 1$ では図4の点線となる。 $\beta = \frac{\pi}{3}$ 付近で標準偏差が一度下がるが、その後中心角とともに標準偏差が大きくなっている。

3. 円形都市における扇形間直線移動

図5左側のような放射分割されている半径 a の円形都市を考える。この都市には、中心角がそれぞれ θ_A, θ_B で頂点 O を共有する二個の扇形ゾーンがある。これら扇形ゾーン

を移動するトリップの理論値は、パラメータを変えた式(6)の組み合わせから計算できる。

二つの扇形ゾーンがなす角度を $\bar{\theta}$ としよう。ただし、 $0 \leq \bar{\theta} \leq \pi - \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$ 。中心角 θ_A と中心角 θ_B との扇形ゾーン間の平均距離 $\nu(\bar{\theta})$ は、式(6)を用いる扇形内平均の加重和として次式を満たす：

$$\begin{aligned} &(\theta_A + \theta_B + \bar{\theta})^2 \mu(\theta_A + \theta_B + \bar{\theta}) \\ &= (\theta_A + \bar{\theta})^2 \mu(\theta_A + \bar{\theta}) + (\theta_B + \bar{\theta})^2 \mu(\theta_B + \bar{\theta}) \\ &\quad - \bar{\theta}^2 \mu(\bar{\theta}) + 2\theta_A \theta_B \nu(\bar{\theta}). \end{aligned} \quad (9)$$

左辺は、三つの扇形ゾーンにおける全移動の測度である。右辺の最初の2項は隣接する扇形ゾーン合体内の測度であり、ダブルカウント測度を第3項で取り除いている。 μ が既知であることから、平均距離 $\nu(\bar{\theta})$ は式(9)を解くことで求められる。

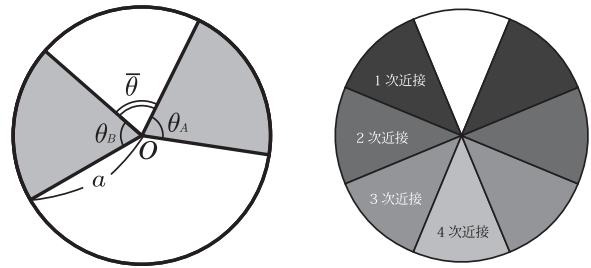


図- 5: 円形都市と扇形位置関係

表- 1: 扇形ゾーン内々及び内外距離の平均値

扇形数	1	2	3	4	5	6	7	8
内々	0.91	0.71	0.56	0.47	0.42	0.39	0.37	0.35
1次	-	1.10	1.08	0.94	0.82	0.72	0.65	0.60
2次	-	-	-	1.27	1.24	1.15	1.05	0.97
3次	-	-	-	-	-	1.31	1.28	1.23
4次	-	-	-	-	-	-	-	1.32

表- 2: 扇形ゾーン内々及び内外距離の標準偏差

扇形数	1	2	3	4	5	6	7	8
内々	0.42	0.38	0.29	0.23	0.21	0.19	0.19	0.18
1次	-	0.37	0.37	0.35	0.30	0.27	0.24	0.22
2次	-	-	-	0.32	0.32	0.31	0.28	0.26
3次	-	-	-	-	-	0.33	0.32	0.31
4次	-	-	-	-	-	-	-	0.33

等放射分割された円形都市において扇形ゾーン間の平均距離を計算する。隣接扇形ゾーン間の距離を1次近接距離、その隣のゾーンとの距離を2次近接距離、 k 個隣の扇形ゾーン間距離を k 次近接距離と呼ぶ。例として $n = 8$ 分割状況は図5右側のようなになる。

n 個の扇形ゾーンに等放射分割された円形都市 ($a = 1$) において、式(6)から導かれる扇形ゾーン内々平均距離と、式(9)に各 n, k に対応する $\theta_A, \theta_B, \bar{\theta}$ を代入することで得られる k 次近接距離を計算すると、表1のようなになる。当然だが、同じ分割数では近接次数 k とともに k 次近接距離は上昇し、分割数 n が増えるにつれて各 k 次近接距離は減少する。

同様に、直線距離の二乗の期待値 $y(\bar{\theta})$ は次式を満たす：

$$\begin{aligned} & (\theta_A + \theta_B + \bar{\theta})^2 \lambda(\theta_A + \theta_B + \bar{\theta}) \\ = & (\theta_A + \bar{\theta})^2 \lambda(\theta_A + \bar{\theta}) + (\theta_B + \bar{\theta})^2 \lambda(\theta_B + \bar{\theta}) \\ & - \bar{\theta}^2 \lambda(\bar{\theta}) + 2\theta_A \theta_B y(\bar{\theta}). \end{aligned}$$

式 (8) を用いることで、 $y(\bar{\theta})$ が求めることができる。その結果、分散や標準偏差を求めることができる。

表 2 に、標準偏差を扇形数の関数で示す。表 2 から、扇形ゾーン数が増加するにつれて、また扇形ゾーン間が近くなるにつれて、標準偏差が小さくなることが理解できる。扇形面積が小さく近隣であるほど安定した数値となるからである。

4. 近似式の評価

4.1 地域内距離の近似式

代表点を用いて集計化するとゾーン内々距離はゼロとなる。距離を逆数とする重力モデルは分布交通量推定などに用いられるが、内々交通推定にてゼロ割の発生など不都合が生じ計算結果が安定しない。一般形状領域におけるゾーン内々平均距離 r_W は導出困難であり、腰塚⁷⁾ は計算が容易な近似式を提示した：

$$r_W \approx 0.13L, \quad (10)$$

$$r_W \approx 0.33R. \quad (11)$$

ただし、 L は領域の周長、 R は領域の直径である。凸扇形 ($0 \leq \beta \leq \pi$) に対し、この近似式がどの程度適合するのかを本研究で導いた理論値と比較することで検証する。

扇形では、周長 L は弧の長さ βa と 2 本の半径の長さ $2a$ との和となる。直径 R は中心角が狭い場合には半径 a 、広い場合は弦の長さ $2a \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ で与えられる。つまり、

$$\begin{aligned} L &= (2 + \beta)a, \\ R &= \begin{cases} a & \text{for } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3} \\ 2a \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \text{for } \frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

これらと式 (10) 及び (11) から $\mu(\beta)$ の近似式が得られる：

$$\begin{aligned} f_1(\beta) &= 0.13(2 + \beta)a, \\ f_2(\beta) &= \begin{cases} 0.33a & \text{for } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3} \\ 0.66a \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \text{for } \frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

図 6 は $a = 1$ の場合の平均値の比較である。横軸で中心角 β を測り、理論値 $\mu(\beta)$ を実線、近似値 $f_1(\beta)$ 、 $f_2(\beta)$ を点線と破線でそれぞれ示す。これらの図から、腰塚⁷⁾ による近似式はともに優れていることが確認できる。直径 R は $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$ では一定であり中心角の影響を受けないこともあり、周長を用いた近似式の方がより高精度となる。このように、本質を追究し実用性も視野に入れた極めて単純な構造であることが扇形計算からも検証できた。

4.2 地域間距離の近似式

ゾーン間距離 r_B に関しても厳密に計算することは難しく、ゾーン代表点間距離で代用されることが多い。この場合、代表点への集計化により誤差が発生する。栗田⁴⁾ は、そのような誤差を少なくする近似式を提案した。

$$r_B \approx h + \frac{s^2 + t^2}{8h}. \quad (12)$$

h は 2 地域の重心間距離、 s 及び t は各地域と同面積を持つ円の半径である。近似式の第二項は正のため重心間距離よりは大きくなる。この近似式が、どの程度適合するのかを本研究で導いた理論値と比較し検証する。

中心角 β で半径 a の扇形では、その重心から扇形頂点までの距離は $\frac{2 \sin \beta}{3\beta} a$ である。従って、角度 $\bar{\theta}$ 離れたこれら二つの扇形間の重心間距離 h_s は、

$$h_s = \frac{4 \sin \beta \sin\left(\frac{\bar{\theta} + \beta}{2}\right)}{3\beta} a$$

となる。扇形面積は $\frac{\beta a^2}{2}$ であるので、この扇形は半径 $\sqrt{\frac{\beta a^2}{2\pi}}$ の円と等面積となる。 $s^2 = t^2 = \frac{\beta a^2}{2\pi}$ とすることで、扇形ゾーン間平均距離に関して、式 (12) に関する近似式 $g_1(\bar{\theta})$ 、さらに重心間距離のみを用いた近似式 $g_2(\bar{\theta})$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} g_1(\bar{\theta}) &= \left(\frac{4 \sin \beta \sin\left(\frac{\bar{\theta} + \beta}{2}\right)}{3\beta} + \frac{3\beta^2}{32\pi \sin \beta \sin\left(\frac{\bar{\theta} + \beta}{2}\right)} \right) a, \\ g_2(\bar{\theta}) &= \left(\frac{4 \sin \beta \sin\left(\frac{\bar{\theta} + \beta}{2}\right)}{3\beta} \right) a. \end{aligned}$$

$a = 1, \beta = \frac{\pi}{8}$ と固定し $0 \leq \bar{\theta} \leq \frac{7}{8}\pi$ の範囲とし、図 7 に理論値 $\nu(\bar{\theta})$ を実線で、近似値 $g_1(\bar{\theta})$ 及び $g_2(\bar{\theta})$ を点線と破線で示す。円形都市の扇形間距離において、近似式 $g_1(\bar{\theta})$ の高精度を数値的に確認できた。

5. 移動施設の移動効率性

被災時に、人員や荷物の大量運搬及び機動性に優れるバスが、移動する非常電源として注目されている。特に、燃料電池で駆動するバス (FC バス) への期待は高い。そこで、圏域全体で 1 台の FC バスがサービスを提供していると想定し、固定点からのサービスと比較して移動サービスがアクセスの観点からどの程度有効なのか、扇形内、扇形間の平均距離を用いて評価する。

駅を中心とする円形地域を考える。被災時に電源を必要とする場所 (避難所、病院) がこの地域内に一様に分布しているとしよう。地域中心に位置する駅から扇形地域を巡回する循環バスが運行しているとす。被災時間帯は予想できないので、巡回バスの位置は電源を必要とする場所と独立にかつ扇形内で一様分布すると仮定できよう。

図 8 左側に示すように、中心角 β の扇形内における移動施設 M の効率性を検討する。そのため、図 8 右側のよう

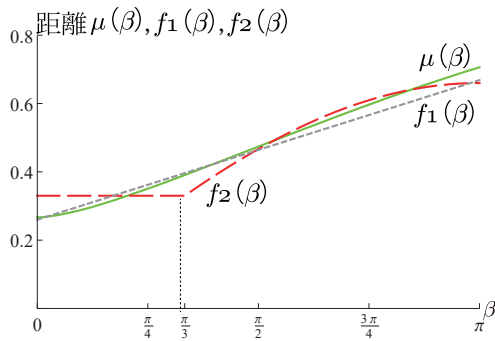


図- 6: 扇形内距離の近似値と理論値

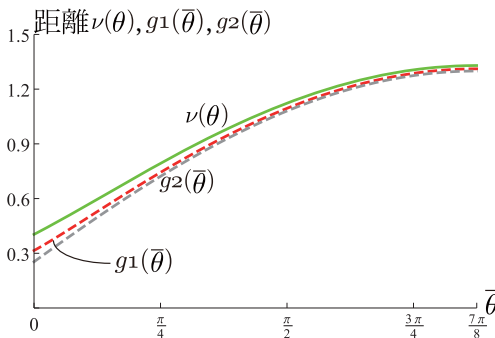


図- 7: 扇形間距離の近似値と理論値

に、扇形頂点 O 、外周中点 Q 、外周端点 R からの直線距離と比較する。扇形頂点 O は駅である円形都市中心に、外周上の Q 及び R は円形都市外周にそれぞれ FC バスが待機していると想定できる。なお、外周上のみで平均距離を比較すると、中点 Q が最良で端点 R が最悪の場所となる。頂点 O から扇形内部への派遣距離 $h_O(\beta)$ は中心角 β とは独立に

$$h_O(\beta) = \frac{2}{3}a.$$

外周中点 Q 、端点 R からの平均距離 $h_Q(\beta)$ 、 $h_R(\beta)$ は

$$h_Q(\beta) = \mu_0 \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad h_R(\beta) = \mu_0(\beta).$$

移動施設による平均距離 $\mu(\beta)$ 及び固定位置からの平均距離 $h_O(\beta), h_Q(\beta), h_R(\beta)$ のグラフを図 9 に示す。 $h_O(\beta) = \mu(\beta)$ 、 $h_O(\beta) = h_Q(\beta)$ 、 $h_O(\beta) = h_R(\beta)$ を満たす β を数値計算で求めると、それぞれ $2.843 (= 0.91\pi)$ 、 $2.592 (= 0.83\pi)$ 、 $1.296 (= 0.41\pi)$ となる。中心角 β が狭い場合、

$$\mu(\beta) < h_Q(\beta) < h_R(\beta) < h_O(\beta),$$

β が広い場合、

$$h_O(\beta) < \mu(\beta) < h_Q(\beta) < h_R(\beta),$$

が成り立ち、直観に合う。その結果、扇形中心角が 2.843 以下の時、 $\mu(\beta)$ が最も小さい。このように、移動施設サービスが優れることとその度合いが数値的に確認できた。

次に、 n 個の扇形に等分割されている円形都市を考える。表 1 から、2 分割内々距離は $0.71a$ だが、3 分割では $0.56a$ であり頂点 O からの派遣距離 $0.67a$ を下回る。移動施設で

は位置が変動するので確率現象であり表 2 に示すバラツキも発生するが、3 分割以上であれば移動施設の方が効率的であることが分かる。次に、電源不足やバックアップの視点から隣接扇形からの派遣を想定する。1 次近接距離は、6 分割では $0.72a$ 、7 分割では $0.65a$ である。したがって、バックアップも考慮を入れると、 $n \geq 7$ であれば移動施設サービスが中心地派遣より平均距離が短いことが理解できる。

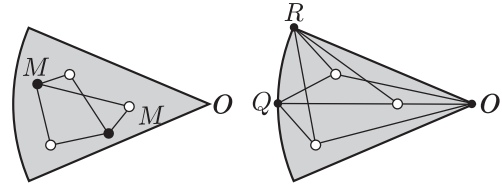


図- 8: 移動施設から及び 3 固定場所からの移動

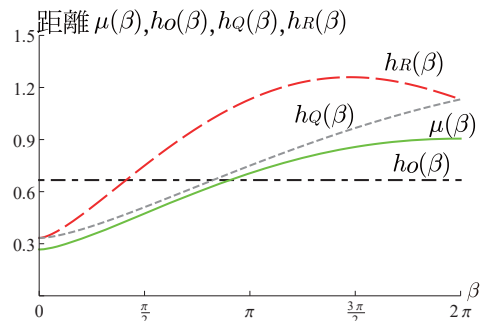


図- 9: 平均距離の比較

6. おわりに

本研究では、扇形内及び扇形間の距離の平均及び分散の解析表示を導出した。そして、これらの理論値との比較により、既存の簡潔な近似式の精度を論じた。さらに、移動施設によるバックアップ電源供給の効率性を論じた。

謝辞

筑波大学名誉教授腰塚武志先生、慶応大学栗田治先生から有意義なコメントを頂いた。本研究はトヨタ自動車と筑波大学社会工学域との共同研究「次世代社会システムとモビリティの新価値研究」の一環で実施した。

参考文献

- 1) Kendall, M.G. and P.A.P. Moran(1963): *Geometrical Probability*. Charles Griffin and Company Limited.
- 2) 腰塚武志 (1986): 都市平面における距離の分布, 都市計画数理. 朝倉書店.
- 3) Mathai, A.M.(1999): *An Introduction to Geometrical Probability*. Gordon and Breach Science Publishers.
- 4) 栗田治 (2004): 都市モデル読本. 共立出版.
- 5) 鶴飼孝盛, 栗田治 (2002): 放射・環状道路網を有する扇型都市における移動距離の分布. 都市計画論文集, 37, pp.43-48.
- 6) Ghosh, B. (1951): Random distances within a rectangle and between two rectangles. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 43, pp. 17-24.
- 7) 腰塚武志 (1978): 地域内距離. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 21(2), pp.302-319.
- 8) 高原勇, 大澤義明 (2016): 自動車に残るエネルギー量の推定と被災地域への応用. 日本計画行政学会, 39(4), pp.53-60.