

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 5 月 20 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400104

研究課題名(和文) 多項式写像と多変数超幾何関数の大域的モノドロミーの研究

研究課題名(英文) Study on polynomial maps and hypergeometric functions of several variables

研究代表者

竹内 潔 (Takeuchi, Kiyoshi)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70281160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについて研究した。特に無限遠点において従順でない写像に対し、一般ファイバーのコホモロジーに関する消滅定理を証明することで、無限遠点のまわりのモノドロミーのジョルダン標準型を多くの場合に記述した。またこの研究の副産物として、多項式写像の分岐点集合の表示を得た。さらに合流型 A-超幾何関数の無限遠点におけるモノドロミーの固有多項式の公式が得られた。モノドロミー予想については、原点で非退化な多項式に対して多くの場合に予想が成り立つことを証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied monodromies at infinity of polynomial maps. Especially for the maps which are not tame at infinity, by proving a vanishing theorem on the cohomology groups of generic fibers, we described the Jordan normal forms of their monodromies at infinity in many cases. As a byproduct of this study, we obtained also a description of the bifurcation sets of polynomial maps. Moreover, a formula for the characteristic polynomials of the monodromies at infinity of confluent A-hypergeometric functions was obtained. As for the monodromy conjecture, we confirmed it for polynomials which are non-degenerate at the origin in many cases.

研究分野：代数解析

キーワード：D-加群 超幾何関数 特異点理論 モノドロミー 偏屈層 ミルナー束

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者はこれまで、代数解析の手法を用いて偏微分方程式や特異点理論、Lefschetz型不動点公式、射影双対性、A-超幾何関数、などを研究してきた。特にここ数年は連携研究者の松井優と共同で、近年多くの研究者により研究されている多項式写像の「無限遠点のまわりでのモノドロミー」(ファイバーの大域的な接続状況を表す)の研究を行った。その結果、トーリックコンパクト化の手法をモチヴィックミルナーファイバーの理論と組み合わせることで、多項式写像の無限遠点のまわりでのモノドロミーのジョルダン標準型を多項式のニュートン多面体で記述することに成功した。しかしながらその研究においては「無限遠点において従順」という仮定が必要であった。コンビニエントでない多項式は無限遠点からの特異性などの研究において非常に重要かつ基本的な研究対象であるが、この仮定を満たさない。そのような場合の無限遠点からの特異性は Nemethi, Zaharia などの多くの数学者により詳しく研究されてきたが、一般ファイバーのトポロジーやモノドロミーについてはほとんど何も解明されていなかった。また Gelfand-Kapranov-Zelevinsky の導入した A-超幾何関数 (A-超幾何微分方程式の正則関数解) を一般化して Adolphson が導入した合流型 A-超幾何関数の積分表示は、数年前の研究代表者と Esterov の共同研究により世界で初めて得られた。この積分表示は合流型 A-超幾何関数の無限遠点における漸近展開にただちに應用されたが、モノドロミーを調べることには大きな技術的困難があった。しかしながら配置 A の凸包をとって得られる多面体を用いてモノドロミーが記述できるのではないかという期待があった。さらに研究代表者は、岡田季久との局所ゼータ関数の極の構造の研究を通して特異点理論における最も深遠な未解決問題の1つであるモノドロミー予想に強い興味を持った。これは Denef, Loeser などの著名な数学者が提唱し、世界で非常に活発に研究されている予想であるが、これまでの研究では強い仮定の下でしか証明できていなかった。研究代表者のこれまでのトーリックコンパクト化や D-加群についての研究における経験から、非退化という非常に弱い仮定のもとで予想が証明できるのではという期待があった。

## 2. 研究の目的

多項式写像のモノドロミーに関しては、無限遠点におけるモノドロミー、さらにはモノドロミー表現全体を研究する。特に多項式写像が無限遠点において従順でない場合について詳しく研究し、無限遠点からの特異性や写像の分岐点集合についても調べる。合流型 A-超幾何関数に関しては、その積分表示

の積分路の構成を改良することで、大域的なモノドロミーを解明する。モノドロミー予想に関しては、 $p$ 進体上の井草ゼータ関数および位相的ゼータ関数に関する予想を研究する。位相的ゼータ関数に関するモノドロミー予想については、特に原点で非退化な多項式をまず詳しく調べる。

## 3. 研究の方法

無限遠点において従順でない多項式写像の研究においては、無限遠点において非退化だがコンビニエントでない多項式を考え、そのニュートン多面体と適合したトーリックコンパクト化の上の構成可能層を研究した。さらにその研究の過程で、多項式写像の分岐点でのファイバーの位相型の跳躍を偏屈層を用いて詳しく記述した。また合流型 A-超幾何関数のモノドロミーの研究においては、まず配置 A の凸包をとって得られる多面体と適合したトーリックコンパクト上でモノドロミーの研究に都合のよい新しい積分路を構成した。次にこのようにして構成した積分路がパラメーターの変化によりどう変形するかを、局所係数のねじれコホモロジーなどの位相幾何学的手法で研究した。モノドロミー予想の研究においては、原点において非退化な多項式を扱い、その位相的ゼータ関数の極の候補がいつ極にならず偽の極 (fake pole) になるかをまず詳しく調べた。次にモノドロミーゼータ関数の各固有値ごとの重複度を初等整数論や組合せ論などを用いて精密に計算した。さらにコンビニエントでなく原点で非孤立特異点を持つ多項式の研究を孤立特異点の場合に帰着する方法を開発した。

## 4. 研究成果

## (1) 研究の主な成果

多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについては、無限遠点において非退化だがコンビニエントでない多項式に対し悪い固有値を定義し、その悪い固有値以外の良い固有値については一般ファイバーのコホモロジー群の広義固有空間が中間の次数のみに集中することを証明した。この消滅定理により、無限遠点において従順でない場合でも、無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型を良い固有値の部分に関しては多項式のニュートン多面体で記述することに成功した。さらにこの研究で用いたトーリックコンパクト化により多項式写像の分岐点集合を研究し、Nemethi-Zaharia の仕事を多項式写像の値域が高次元の場合に一般化した。すなわち多項式写像の分岐点集合をニュートン多面体を用いて記述する一般的な公式を得た。また Nemethi-Zaharia による分岐点集合の上からの評価が多くの場

合に最良であることを、偏屈層の理論を用いて証明した。合流型 A-超幾何関数の研究に関しては、まず配置 A の凸包をとって得られる多面体と適合したトーリックコンパクト上で新しい積分路を構成した。そしてこれを用いて、合流型 A-超幾何関数の無限遠点におけるモノドロミーの固有多項式を多面体の面の体積を用いて記述することに成功した。また副産物として、ローラン多項式の族から定まる代数的トーラス内の超曲面配置の補集合上の局所系のコホモロジー群が中間次数に集中するとことを示した。これは Gelfand-Kapranov-Zelevinsky による先行結果を改良するものである。モノドロミー予想の研究に関しては、原点で非退化な多項式については高次元の場合でもほとんどの場合に予想が成り立つことを証明した(論文準備中)。また以上の研究とは別に高次元の不動点集合を持つ Lefschetz 不動点定理を研究し、これまでの研究で仮定していた写像の条件を大幅に緩めることに成功した。

## (2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

無限遠点において従順でない多項式写像に対して我々が証明した消滅定理は、無限遠点において従順な場合における Broughton (Invent. Math., 1988) の一般ファイバーのブーケ分解定理をコホモロジー群のレベルで一般化したものであると考えることができる。すなわち、これにより無限遠点において従順でない場合の研究が初めて可能になったという歴史的な意義があると思われる。合流型 A-超幾何関数については、その大域的な性質は何もわかっていなかったの、我々の無限遠点におけるモノドロミーの公式はこの方面の研究の端緒を世界で初めて開いたものといえよう。モノドロミー予想に関しては、これまでの研究は 2 次元や 3 次元の場合のものがほとんどで、高次元で一般的に研究した論文は数少ない。その中でも Loeser (Amer. J. Math., 1988) は代表的な論文であるが、我々の結果はそこにおける強い仮定を外すことに成功している。また多項式写像のモノドロミーの研究の副産物として得られた分岐点集合に関する一連の結果は、現在世界的に注目を集めている分野における結果であり、今後の発展が大いに期待される。そして我々の得た高次元の不動点集合を持つ Lefschetz 不動点定理は、これまでの Goresky-MacPerson による結果を改良するものであり、これも今後の発展が期待できる。

## (3) 今後の展望

多項式写像のファイバーの幾何学的モノドロミーに関しては、我々の研究により無限遠

点におけるモノドロミーについて非常に詳しい情報が得られた。さらに進んでその基本群の表現としての全体像を決定することは、重要な課題であると思われる。その研究のためには、写像のモース化などの理論が今後必要になると考えている。合流型 A-超幾何関数のモノドロミーについても、無限遠点におけるものだけでなくモノドロミー表現全体を決定するのは、非常に難しいがやりがいのある問題である。またモノドロミー予想については、今後は原点で非退化な場合だけでなく一般の場合を研究したい。そのためには、弧空間上の混合ホッジ加群を考えるなどの、より新しいアイデアや理論が必要になるとと思われる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

A. Esterov, 竹内潔, On vanishing theorems for local systems associated to Laurent polynomial, Nagoya Math. J., 査読有 (2016): 印刷中.

竹内潔, M. Tibar, Monodromies at infinity of non-tame polynomials, Bull. Soc. Math. France, 査読有 (2016): 印刷中.

竹内潔, 松井優, On the sizes of the Jordan blocks of monodromies at infinity, Hokkaido Math. Journal, 査読有, Vol. 44. No. 3 (2015): 1-14. [http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp/page/44-3/pdf/HMJ44\\_313-326.pdf](http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp/page/44-3/pdf/HMJ44_313-326.pdf)

安藤加奈, A. Esterov, 竹内潔, Monodromies at infinity of confluent A-hypergeometric functions, Advances in Mathematics, 査読有, Vol. 272 (2015): 1-19. doi: 10.1016/j.aim.2014.10.024

A. Esterov, 竹内潔, Confluent A-hypergeometric functions and rapid decay homology cycles, American J. Math., 査読有, Vol. 137 (2015): 365-409. DOI: 10.1353/ajm.2015.0014

Y. Chen, R. Dias, 竹内潔, M. Tibar, Invertible polynomial mappings via Newton non-degeneracy, Annales de l'Institut Fourier, 査読有, Vol. 64 (2014): 1807-1822. doi: 10.5802/aif.2897

竹内潔、松井優, Motivic Milnor fibers and Jordan normal forms of Milnor monodromies, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, Vol. 50 (2014): 207-226. doi: 10.4171/PRIMS/130

竹内潔、岡田季久, Meromorphic continuations of local zeta functions and their applications to oscillating integrals, Tohoku Math. Journal, 査読有, No. 65 (2013): 159-178. [https://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/abs/abs65\\_2\\_1.html](https://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/abs/abs65_2_1.html)

竹内潔、松井優, Monodromy at infinity of polynomial maps and Newton polyhedra (with Appendix by C. Sabbah), Int. Math. Res. Not., 査読有, Vol. 2013, No. 8 (2013): 1691-1746. doi: 10.1093/imrn/rns092

〔学会発表〕(計 13 件)

竹内潔, On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties, The 3rd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2015年11月30日, ハノイ数学研究所、ハノイ(ベトナム)

竹内潔, Hyperbolic localization and Lefschetz fixed point formulas for higher-dimensional fixed point sets, D-modules and singularities, 2015年9月15日, Padova 大学, パドヴァ(イタリア)

竹内潔, 合流型 A-超幾何関数とトーリックコンパクト化, 超幾何学校2015, 2015年9月1-2日, 神戸大学理学部(兵庫県神戸市)

竹内潔, Monodromies and asymptotic expansions at infinity of confluent A-hypergeometric functions, 農工大数学セミナー, 2015年6月23日, 東京農工大小金井キャンパス(東京都小金井市)

竹内潔, 多項式写像の無限遠点における特異性とモノドロミー, トポロジーシンポジウム, 2014年7月28日, 東北大学片平キャンパス(宮城県仙台市)

竹内潔, Monodromies and asymptotic expansions at infinity of confluent A-hypergeometric functions, First Joint International Meeting RSME-SCM etc., 2014年7月1日,

バスク大学、ビルバオ(スペイン)

竹内潔, Motivic Milnor fibers and their virtual Betti numbers, 特異点セミナー, 2014年6月27日, セビリア大学、セビリア(スペイン)

竹内潔, Bifurcation points of polynomial functions and perverse sheaves, 超平面と超曲面特異点のトポロジー, 2014年4月26日, 東京理科大学(東京都新宿区)

竹内潔, 合流型 A-超幾何関数のモノドロミーについて, 超幾何方程式研究会2014, 2014年1月7日, 神戸大学理学部(兵庫県神戸市)

竹内潔, Toric compactifications for polynomial maps and their applications, The 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2013年9月19日, ニース大学、ニース(フランス)

竹内潔, On the monodromies of complex polynomials, Australian-Japanese workshop on real and complex singularities, 2013年9月10日, シドニー大学、シドニー(オーストラリア)

竹内潔, Geometry of non-tame polynomial maps, The Second Pacific Rim Mathematical Association Congress, 2013年6月27日, 上海交通大学、上海(中国)

竹内潔, Confluent A-hypergeometric functions and rapid decay homology cycles, Weekend Workshop on Computational Approaches to D-modules and Hypergeometric Systems, 2013年4月20日, 神戸大学理学部(兵庫県神戸市)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

竹内 潔 (TAKEUCHI Kiyoshi)  
筑波大学・数理物質系・教授  
研究者番号: 70281160

### (2) 連携研究者

松井 優 (MATSUI Yutaka)  
近畿大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 10510026