



2017年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2017
URL	http://hdl.handle.net/2241/00148434

情報数学III講義（第7回）

平成29年11月22日

§ 復習：微分形式

前回までの講義で交代形式を学んできた。

1 次の交代形式	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	線形写像
2 次の交代形式	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	二重線形・交代
m 次の交代形式	$\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ <small>m 個</small> $\rightarrow \mathbb{R}$	m 重線形・交代

ここで、 m 次の微分形式とは \mathbb{R}^n の各点に m 次の交代形式を対応させる写像をいい、例えば1 次の交代形式の全体は線形空間であるが、 n 次元のベクトルについて基底 $dx_i (1 \leq i \leq n)$ は

$$dx_i : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}}$$

と表される。

§ くさび形積

2つの1 次の交代形式 φ, ψ に対して、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ を用いた

$$(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a})\psi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{b})\psi(\mathbf{a})$$

は2次の交代形式であることを示したい。例えば二重線形性（の一部）について

$$\begin{aligned}
 & (\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \\
 &= \varphi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\psi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{b})\psi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \\
 &= (\varphi(\mathbf{a}_1) + \varphi(\mathbf{a}_2))\psi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{b})(\psi(\mathbf{a}_1) + \psi(\mathbf{a}_2)) \\
 &= \frac{\varphi(\mathbf{a}_1)\psi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{b})\psi(\mathbf{a}_1)}{(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})} + \frac{\varphi(\mathbf{a}_2)\psi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{b})\psi(\mathbf{a}_2)}{(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})}
 \end{aligned}$$

である。(続きはレポート課題Iで)

また, dx_i, dx_j を用いると,

$$\begin{aligned}
 \frac{(dx_i \wedge dx_j)(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\varphi \quad \psi} &= \frac{dx_i(\mathbf{a})}{a_i} \frac{dx_j(\mathbf{b})}{b_j} - \frac{dx_i(\mathbf{b})}{b_i} \frac{dx_j(\mathbf{a})}{a_j} \\
 &= a_i b_j - b_i a_j = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

のようになる。(→レポート課題IIへ)

さらに, φ と ψ が1次の交代形式である場合,

$$(\psi \wedge \varphi)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a})\varphi(\mathbf{b}) - \psi(\mathbf{b})\varphi(\mathbf{a})$$

であることから $\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi$ であることが分かる。

ここで $\psi = \varphi$ である場合, $\varphi \wedge \varphi = -\varphi \wedge \varphi$ であり, $2\varphi \wedge \varphi = 0 \Rightarrow \varphi \wedge \varphi = 0$ である。(→レポート課題IIIへ)

続いて, 1次の交代形式 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ($\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ m 個 $\rightarrow \mathbb{R}$) を考える。このとき,

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) \\
 &= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \varphi_1(\mathbf{a}_{\sigma(1)}) \varphi_2(\mathbf{a}_{\sigma(2)}) \cdots \varphi_m(\mathbf{a}_{\sigma(m)})
 \end{aligned}$$

は m 重線形かつ交代性を持つので, m 次の交代形式を持つ (例えば, $m = 2$ については本節の最初の式で示した通り)。

すなわち, m 次の交代形式の全体は線形空間を持ち, 基底は

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n}$$

で表される (→レポート課題 IV へ) .

ここで, 例えば $\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$ のとき,

$$(\varphi_{11} + \varphi_{12}) \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = \varphi_{11} \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m + \varphi_{12} \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$$

$$(\alpha\varphi_1) \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = \alpha\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = -\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$$

が成り立つ.

§ くさび形積と微分形式

1 次の微分形式は $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$ ($f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), 2 次の微分形式は $f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ ($f_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) と表される. これを拡張すると m 次の微分形式は,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} f_{i_1, i_2, \dots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$$

と表される.

ここで 0 次の微分形式 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. 微分 $D\varphi$ は 1 次の微分形式であり, 点 \mathbf{x} から伸びる微小長の曲線 $\mathbf{a}d$ について,

$$\begin{aligned} (D\varphi)(\mathbf{x})(\mathbf{a})d &= \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}d) - \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right)}_{D\varphi(\mathbf{x})} (\mathbf{a})d \end{aligned}$$

は微小長の曲線に関する線積分である.

また 1 次の微分形式 ω について, $D\omega$ は 2 次の微分形式である. 点 \mathbf{x} から相違なる 2 方向に伸びる微小ベクトル $\mathbf{a}d_1, \mathbf{b}d_2$ について,

$$\begin{aligned} D\omega(\mathbf{a}d_1, \mathbf{b}d_2) &= (D\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}))d_1 d_2 \\ &= \omega(\mathbf{x})(\mathbf{a}d_1) + \omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}d_1)(\mathbf{b}d_2) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{b}d_2)(\mathbf{a}d_1) - \omega(\mathbf{x})(\mathbf{b}d_2) \end{aligned}$$

を考える. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$ と表されることから, 上式の下線を引い

た2項を取り出して計算すると,

$$\begin{aligned}
& \omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}d_1)(\mathbf{b}d_2) - \omega(\mathbf{x})(\mathbf{b}d_2) \\
&= \{f_1(\mathbf{x} + \mathbf{a}d_1) - f_1(\mathbf{x})\} dx_1(\mathbf{b}d_2) + \{f_2(\mathbf{x} + \mathbf{a}d_1) - f_2(\mathbf{x})\} dx_2(\mathbf{b}d_2) + \cdots \\
&\quad + \{f_n(\mathbf{x} + \mathbf{a}d_1) - f_n(\mathbf{x})\} dx_n(\mathbf{b}d_2) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1(\mathbf{a}d_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2(\mathbf{a}d_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n(\mathbf{a}d_1) \right) dx_1(\mathbf{b}d_2) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1(\mathbf{a}d_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2(\mathbf{a}d_1) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n(\mathbf{a}d_1) \right) dx_2(\mathbf{b}d_2) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1(\mathbf{a}d_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2(\mathbf{a}d_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n(\mathbf{a}d_1) \right) dx_n(\mathbf{b}d_2) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) a_1 d_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) a_n d_1 \right) b_1 d_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) a_1 d_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) a_n d_1 \right) b_n d_2
\end{aligned}$$

と計算できる. (→続きは**レポート課題 V**で)

§ 今週のレポート課題

I.

くさび形積について，次の問に答えよ．

- (1) $(\varphi \wedge \psi)(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) を示すことで二重線形であることを示せ．
- (2) $(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\varphi \wedge \psi)(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ を示すことで交代性を持つことを示せ．

II.

$(dx_i \wedge dx_j)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の基底が $\{dx_i \wedge dx_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$ で表されることを示せ．

III.

φ, ψ が 1 次の交代形式のとき，次の式を示せ．

- (1) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi$
- (2) $(\alpha\varphi) \wedge \psi = \alpha(\varphi \wedge \psi)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

IV.

m 次の交代形式について，基底 $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n}$ の次元を求めよ．

(ヒント：レポート課題 II における基底の次元は， $1 \leq i < j \leq n$ を満たす (i, j) の組み合わせを考えて ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2 \cdot (n-2)!}$ で表される)

V.

$D\omega(\mathbf{a}d_1, \mathbf{b}d_2)$ について本文中で扱っていない $\omega(\mathbf{x})(\mathbf{a}d_1) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{b}d_2)(\mathbf{a}d_1)$ を計算することにより， $D\omega(\mathbf{a}d_1, \mathbf{b}d_2)$ を ω を用いない式に変形せよ．