Tulips University of Tsukuba Repository

2017年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2017
URL	http://hdl.handle.net/2241/00148434

情報数学III講義（第6回）

平成28年11月16日

4 分散定理の応用

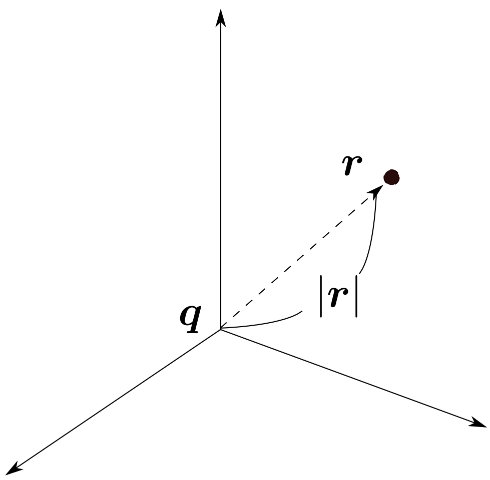
4.1 逆２乗の法則

電磁気学にクーロンの法則というものがある．距離 r だけ離れたところに q_1, q_2 の電荷を持った点電荷があるとき，その間には:

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

で表される力が働く（k は定数 $= 8.99\times\ 10^9$）．このように r^2 に反比例している法則を，逆２乗の法則という．似たような法則には万有引力の法則がある．この逆２乗の法則には面白い性質がある．

まず原点に電荷 q を置き，電荷 q から点 R が受ける力について考える．点 R の位置



ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とすると，大きさは $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ と表せるので，電場 $\boldsymbol{f}$ は以下の式で表せる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= k\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\
&= k\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} \\
&= kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この電場の発散を計算すると，

$$
\begin{aligned}
f_1 = (x,y,z) = kqx(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
f_2 = (x,y,z) = kqy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
f_3 = (x,y,z) = kqz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{f} &= kq\left\{\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{\partial}{\partial y}y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{\partial}{\partial z}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\
&= 3kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と 0 になることがわかる．これは逆 2 乗の法則に従うときのみである．万有引力の法則も逆 2 乗の法則であるので，こちらも発散が 0 になる．

今度は次のような式を考える．

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)^l
$$

先程は $l = -\dfrac{3}{2}$ だったが，距離が離れていくほど力が弱まるとすると，逆 3 乗や逆 2.5 乗でも良い気がする．この発散を計算し，$l = -\dfrac{3}{2}$ でないと発散が 0 にならないことを確認せよ．

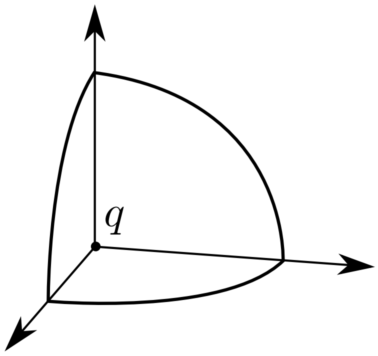
4.2 ガウスの発散定理の条件

閉曲面 Σ で囲まれた領域 Ω に電場 $\boldsymbol{f}$ があったとき，ガウスの発散定理が使えた．

$$
\int_{\Sigma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV
$$

左辺が面積分，右辺が体積分を表している．例えば．ある場所に電荷をおいたときの位置 $\boldsymbol{r}$ における面積分は，右辺の体積分を計算すれば得られる．

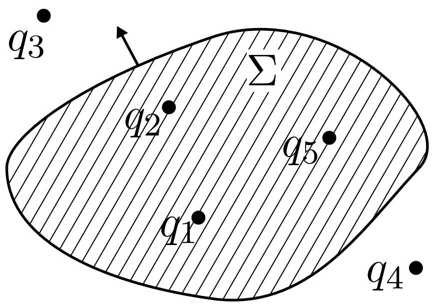
前節までは，発散が 0 になるという話をしてきたが，今回は原点に電荷 q を置いたときに，原点中心に半径 a の球面を考える．



そうすると，球面の点は原点に置いた電荷から等距離であるため，力の大きさは球面のどの点でも同じであり，向きは接平面に垂直となる．この面積分は，球面の表面積 $4\pi a^2$ と力の大きさ $f = \dfrac{kq}{a^2}$ なので，$4\pi kq$ となることがわかる．しかし，ガウスの発散定理を使うと 0 になるのに対して，この場合は $4\pi kq$ となり明らかに 0 にならない．

実は，ガウスの発散定理を使うためには非常に重要な条件がある．それは，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は空間全体で定義されなくても良いが，少なくとも曲面内部ではベクトル場が定義されていなければならないというものである．今回の場合は，球面内部にある電荷が置いてある場所（原点）においてベクトル場が定義されていない．このような点を数学では特異点と呼ぶ．ガウスの発散定理は閉曲面内に特異点が存在しないという制約のもとで成立する定理なのである．

今度は空間の中に閉曲面 Σ があり，この空間の中に電荷が散らばっているとする．

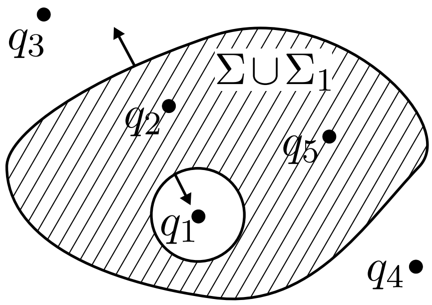


この 5 つの電荷によって生じる電場 $\boldsymbol{f}$ は，q_1 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_1$ と q_2 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_2$ と $\cdots$ と定義すると，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_4 + \boldsymbol{f}_5$ のように表せる．

したがって，この面積分は分解したそれぞれの面積分を計算すれば良い．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \sum_{i=1}^{5}\int_\Sigma \boldsymbol{f}_i\cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで，q_3 と q_4 に関しては特異点が閉曲面の中にないので，ガウスの発散定理を使って 0 になることがわかる．しかし，他の電荷に関しては閉曲面の内部に特異点が存在してしまうため，ガウスの発散定理をそのまま使うことができない．そこで，特異点がある部分 q_1 を小さな球面 Σ_1 で囲って隔離する．



2 つの閉曲面を合体させた $\Sigma\cup\Sigma_1$ を考えると，電荷 q_1 に対する特異点がこの合体させた閉曲面の外になるため，ガウスの発散定理が使える．閉曲面の場合は外向きを表とするため，曲面の向きに注意すると以下のような関係が得られる．

$$\underbrace{\int_{\Sigma\cup\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1\cdot d\boldsymbol{S}}_{=0} = \int_\Sigma \boldsymbol{f}_1\cdot d\boldsymbol{S} + \left(-\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{f}_1\cdot d\boldsymbol{S}\right)$$

したがって，電荷 q_1 を中心とした半径 a の球面を考えると (4.2 のガウスの法則)，

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}_1\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_{\Sigma_1}\boldsymbol{f}_1\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; 4\pi k q_1$$

ということがわかる．q_2 と q_5 も同様なので，

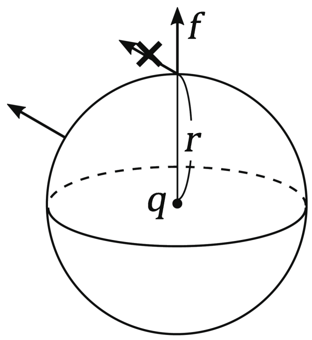
$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; 4\pi k(q_1+q_2+q_5)$$

が得られる．要するに，複数の電荷がある場合の面積分は，閉曲面で囲まれた中の電荷を足し合わせれば良いということである．これをガウスの法則と呼ぶ．このようなことが言えるのは，クーロンの法則が逆 2 乗の関係になっているからにほかならない．

4.3 ガウスの法則からクーロン法則へ

先程までは，クーロンの法則が成り立つものとしてガウスの法則を導いたので，次はその逆を考える．いま，電荷 q がある点を中心に半径 a の球を考える．そうす

ると，生じる電場は接平面に垂直になるはずである．また，球は対称であるため，回転しても球面上で電場の大きさが変化することはない．



ガウスの法則が成り立つので面積分を計算すると，どんな電場が生じているかわからないが $4\pi kq$ が得られる．また，表面積は $4\pi a$ であるため力の大きさ f とすると $4\pi kq \ = \ 4\pi r^2$ が成り立つ．したがって，$f = \dfrac{kq}{r^2}$ となり，クーロンの法則を導くことができた．

§ 作用素ナブラ

作用素 ∇（ナブラ，nabla）というものを導入する．これは形式的に $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される擬似ベクトルとして表現される．∇ を用いて $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ を表すことができる．

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対して，

$$\mathrm{grad}\ \varphi \ = \ \nabla\varphi \ = \ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

によって定義されるベクトル場をスカラー場 φ の勾配という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ に対して，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla\cdot\boldsymbol{f} \ = \ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

によって定義されるスカラー場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の発散という．同様に，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla\times\boldsymbol{f} \ = \ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

さらに、

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

§ 今週のレポート課題

I.

逆 2 乗の法則について，電場 $\boldsymbol{f}$ に関する次式

$$kq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^n \qquad\qquad (n \in \mathbb{R})$$

を計算することで，$n \neq -\dfrac{3}{2}$ の場合は発散が 0 にならず，逆 2 乗の法則が「2 乗の逆数」でしか成り立たないことを確認せよ．