2017年度 情報数学III

情報数学III講義（第5回）

平成29年11月8日

§ 古典的な解析と微分形式の対応関係

スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係は以下のように表せる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{古典的解析} & \text{スカラー場} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{スカラー場} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{微分形式} & 0\text{次} \arrow[r, "d"] & 1\text{次} \arrow[r, "d"] & 2\text{次} \arrow[r, "d"] & 3\text{次}
\end{tikzcd}
$$

なお，grad（gradient）は勾配，rot（rotation）は回転，div（divergence）は発散の意である．

1次の微分形式は,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a})$$

と対応（$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$）し，2次の微分形式は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \mapsto ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))$$

と対応（$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}$）する．

§ 復習：微積分学の基本定理

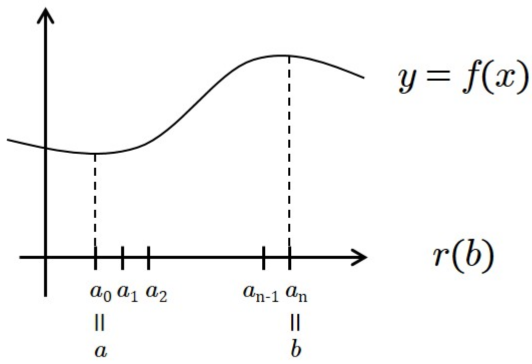
次を微積分学の基本定理と呼ぶ.

微積分学の基本定理

$F' = f$ とする．このとき次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

我々がここで主張したいのは, 基本定理が無限小レベルで成立すると仮定を置くとそこから一般の基本定理が導けるということである．この「仮定」とは第一回の授業で導入したKock-Lawvereの公理にほかならない.

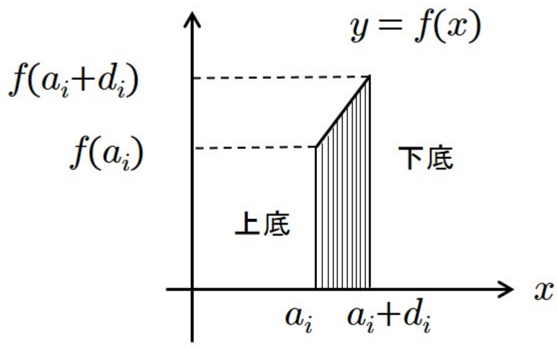


下図のように区間 $[a,b]$ を, 任意の i について $a_{i+1}-a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する.

このとき分割した細長い領域の面積をそれぞれ求めてから足し合わせても結果は変わらないため, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

さて, ここで上式の右辺において i を固定して考える. 任意の i について $a_{i+1}-a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間に分けてあるため, 当然この i についてもそれが成り立つ. したがって Kock-Lawver の公理より f は微小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ において直線となる. (下図参照. なお, $d_i := a_{i+1}-a_i$ としている.)



求める斜線部分は台形であり, 台形の面積公式は (上底)+(下底)×(高さ)/2 なので, 求める面積は

$$\frac{1}{2}d_i(f(a_i)+f(a_i)+f'(a_i)d_i) = f(a_i)d_i$$

となる. つまりこの台形の面積は, 実はタテが $f(a_i)$ でヨコが d_i の長方形の面積と等しいということを示している. ここからただちに無限小レベルでの基本定理, すなわち任意の i に対し

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

が言える.

いま「Kock-Lawvere の公理を認める ⇒ 無限小レベルでの基本定理が成り立つ」を示した. 最後に「無限小レベルでの基本定理が成り立つ ⇒ 基本定理が一般にも成り立つ」を示そう. こちらは以下のような式変形より導ける.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{i-0}^{n-1}(F(a_{i+1})-F(a_i)) \\
&= (F(a_1)-F(a_0))+(F(a_2)-F(a_1))+\cdots \\
&= F(a_n)-F(a_0) \\
&= F(b)-F(a).
\end{aligned}$$

つまり中間部分は丁度打ち消し合ってなくなってしまうため, 区間の端だけが残るというわけである.

3.8 回転定理

次の定理を**回転定理**という.

回転定理

閉曲線 $\partial\Sigma$ を境界とする曲面 Σ に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ.

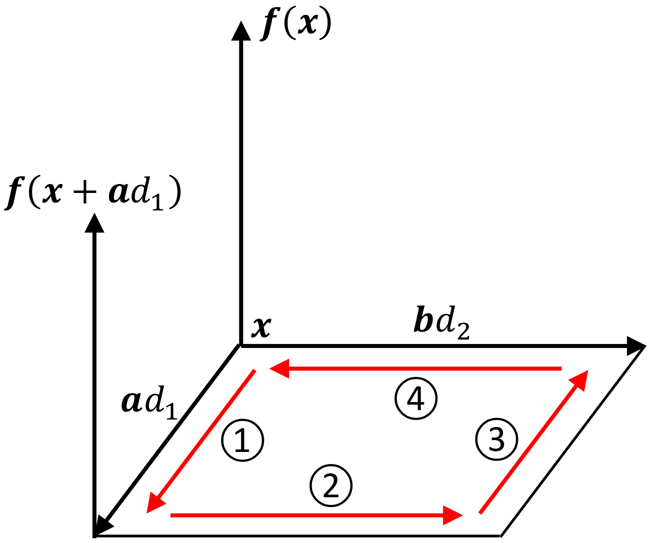
$$\int_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

ここで，基本定理のときと同じように無限小のレベルで定理が成立するよう $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を定義する.

まず閉曲線 $\partial\Sigma$ について線積分を行う向きを決める. 積分は向きを逆にすると符号が逆になってしまうからである. ここでは曲面に対し旗を立てたとき，常に左手方向に旗が見えるように進む方向（図に見える側を表とした場合，表側から見て反時計回り）を正とした. 点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ が張る空間と，ベクトル場 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考える. 無限小のレベルで回転定理が成り立つように $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1,d_2\in D$ を導入する.

定理の右辺（線積分）について計算する. 2 つのベクトルで張られる曲面は平行四辺形であるため，図のように 4 つに分けられる. それぞれの線積分を計算すると以下のようになる.

$$\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}d_1}_{①}+\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot\boldsymbol{b}d_2}_{②}-\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot\boldsymbol{a}d_1}_{③}-\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{b}d_2}_{④}$$



上式より，②と④を $\boldsymbol{b}d_2$ でまとめ，①と③を $\boldsymbol{a}d_1$ でまとめると，

$$
\begin{aligned}
&= \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\}\cdot\boldsymbol{b}d_2-\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot\boldsymbol{a}d_1 \\
&= \left\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\right\}d_1d_2
\end{aligned}
$$

この，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\mapsto\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$ を $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と表す（$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）．
ここで $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$
\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \;=\; \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \;=\; -\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
$$

となり，交代性を持つことがわかる．また，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b}) \\
&\quad= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}) \\
&\quad= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_1})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a_1} \\
&\qquad+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a_2})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a_2} \\
&\quad= \varphi(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b})+\varphi(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

となるので，二重線形性を持つことがわかり（スカラー倍に関しては**レポート課題 I.** で示す），φ が 2 次の交代形式であることがわかる．2 次の交代形式全体は 3 次元の線形空間で $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\exists^!\boldsymbol{g}\in\mathbb{R}^3$）のように表せる．

それでは，$\boldsymbol{g}$ の x 成分を計算するために，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3$ とする．このとき $\boldsymbol{g}$ の x 成分は $\varphi(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ を計算することで求められる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}) \\
&\quad= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_2})\cdot\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_3})\cdot\boldsymbol{e_2}
\end{aligned}
$$

ここで，微分の定義から

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_2})d && (d \in D) \\
&= \boldsymbol{f}(\underbrace{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e_2}d}_{\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}d}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

であり，y 成分だけ残ることになるため，

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_2})d \ = \ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x})d$$

と考えることができる．これを $\varphi(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ に当てはめると

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) \\
&= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_2}) \cdot \boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e_3}) \cdot \boldsymbol{e_2} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e_3} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e_2}
\end{aligned}$$

さらに，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$（$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）を考えると，

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e_3} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e_2} \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる．これが $\boldsymbol{g}$ の x 成分である．同様に，y 成分と z 成分についても導出する（**レポート課題 II.**）と以下のようになる．

$$\boldsymbol{g} \ = \ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right)$$

これを $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ と定義する．

なお，この g の各成分の係数は作用素 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を用いて，ベクトル積 $\nabla \times \boldsymbol{f}$

によって導かれる．

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \boldsymbol{f} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.9 発散定理

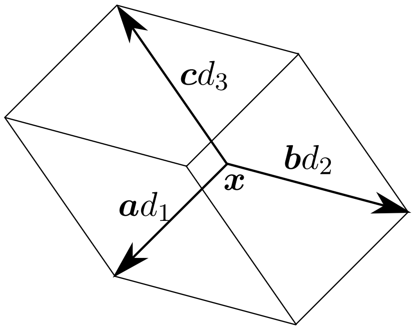
次の定理をガウスの発散定理という．

ガウスの発散定理

閉曲面 Σ を境界とする領域 Ω に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$
\int_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (\mathrm{div}\boldsymbol{f}) dV
$$

先ほどと全く同じ要領で進める．点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が張る平行六面体と，ベクトル場 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルでガウスの発散定理が成り立つように $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1, d_2, d_3 \in D$ を導入する．



定理の左辺（面積分）について計算する．合計で 6 つの面を考えなければならないので，向きに注意する．すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
&=\ \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\}\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})d_3}\}\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
&=\ \{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}d_1d_2d_3
\end{aligned}$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）とおくことで，$\varphi$ が 3 次の交代形式であることを考えたい．（**レポート課題 III.**）

§ 今週のレポート課題

I.

回転定理において，$\varphi(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．

II.

回転定理において，$\boldsymbol{g}$ の y 成分と z 成分 を計算し，5 ページのベクトル $\boldsymbol{g}$ が導かれることを確かめよ．

III.

発散定理において，φ が三重線形性と交代性を持つことを示すことで，3 次の交代形式であることを証明せよ．