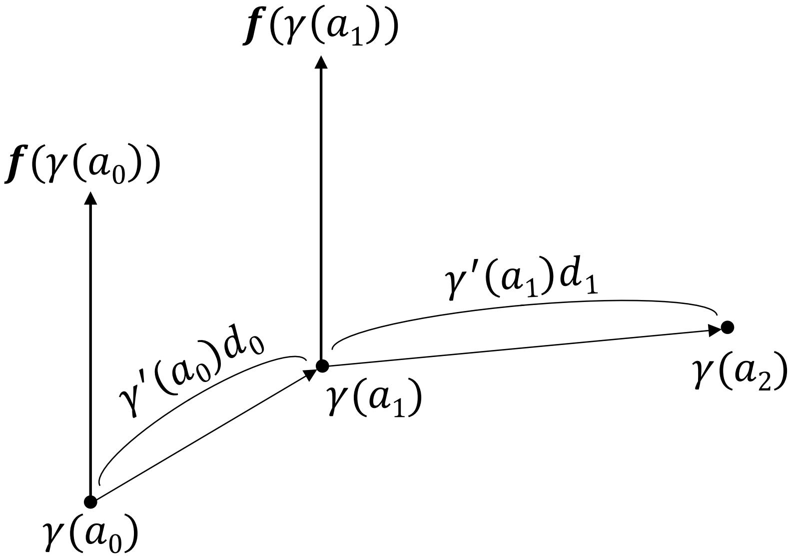
2017年度 情報数学III

情報数学III講義（第4回）

平成29年10月25日

§ 前回の復習：線積分

ベクトル場として，図のような微小区間の力の場を考える．



このとき，なされる仕事は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\gamma(a_0) \cdot (\gamma'(a_0)d_0) + \boldsymbol{f}(\gamma(a_1) \cdot (\gamma'(a_1)d_1) + \dots \\
&= \boldsymbol{f}(\gamma(a_0)) \cdot \gamma'(a_0) \cdot d_0 + \boldsymbol{f}(\gamma(a_1)) \cdot \gamma'(a_1) \cdot d_1 + \dots
\end{aligned}$$

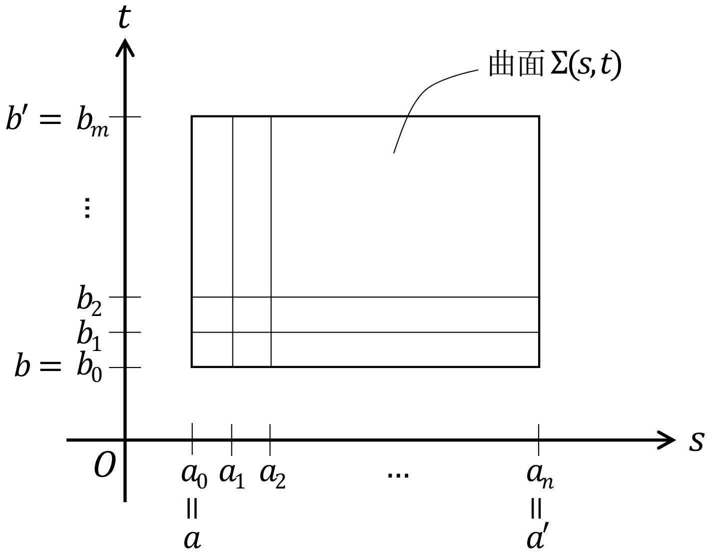
で計算され，これを

$$\begin{aligned}
&\int_r \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{f}(\gamma(a_i)) \cdot \gamma'(a_i) d_i \\
&= \int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt
\end{aligned}$$

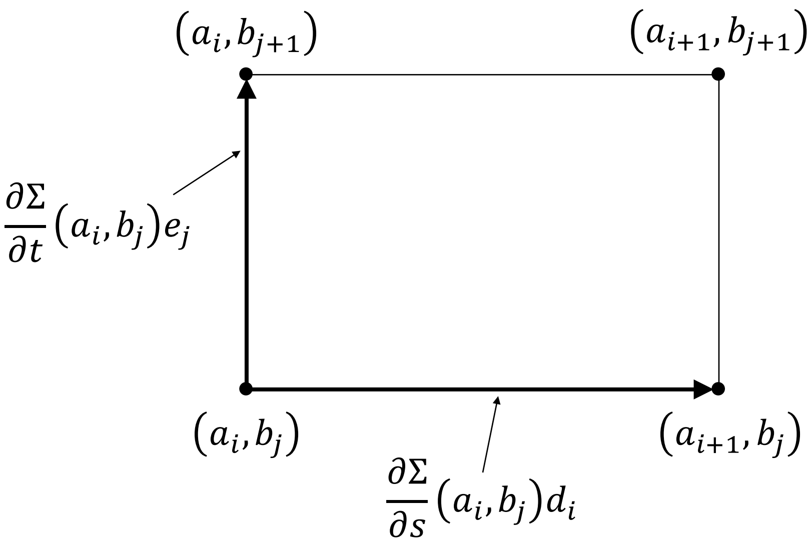
と表す．

§ 前回の復習：面積分

ベクトル場として，水の流れ場を考える．このとき，曲面 $\Sigma[a, a'] \times [b, b'] \to \mathbb{R}^3$ について，次のような図を考える．

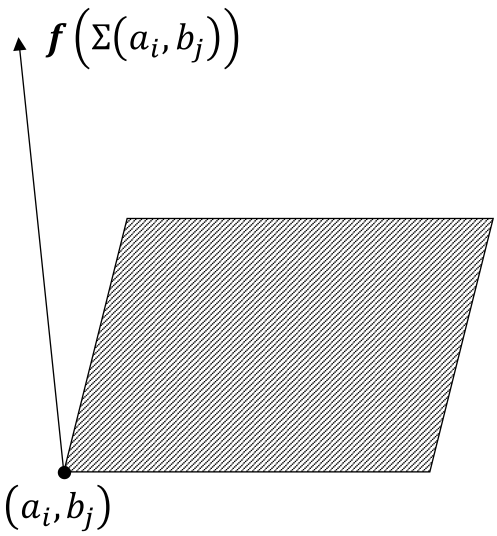


このとき，(a_i, b_j), (a_{i+1}, b_j), (a_i, b_{j+1}), (a_{i+1}, b_{j+1}) の 4 点で囲まれる微小な領域は平行四辺形とみなすことができる．その一部を取り出すと次のような図になる．



ここで，この平行四辺形は 2 本のベクトル $\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i$ と $\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$ で張られる（$d_i = a_{i+1} - a_i$，$e_j = b_{j+1} - b_j$）．

さらに次の図を考える．



ここで考える線積分とはすなわち，面を横切る水の量であり，これは微小領域の平行四辺形の面積（図の斜線部）に高さを掛けた，平行六面体の体積と考えることができる．よって面積分は

$$\boldsymbol{f}(\Sigma(a_i, b_j)) \cdot \frac{\partial\Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i \times \frac{\partial\Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$$

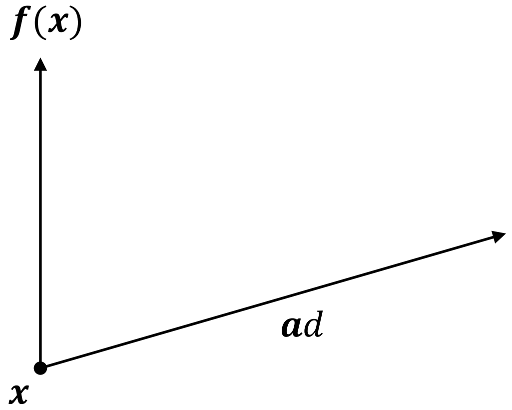
の微小領域分の総和となり（注：$\cdot$ は内積，$\times$ は外積（ベクトル積）を示す），これを

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(a_i, b_j)\right) \cdot \frac{\partial\Sigma}{\partial s}(a_i, b_j) \times \frac{\partial\Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)d_i e_j \\
&= \int_b^{b'} \int_a^{a'} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(s, t)\right) \cdot \frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s, t)dsdt
\end{aligned}$$

と表す．

3.5　1次の交代形式

まず力の場について考える.



点 $\boldsymbol{x}$ で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, $\boldsymbol{x}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}d$$

である.（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.）

ここで $\varphi : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}$ を考える．これは $\mathbb{R}^3$から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．φ は線形性, 交代性（引数を入れ替えると符号が変わる）をもつため **1次の交代形式**と呼ばれる. 空間の各点に1次の交代形式を対応させる写像を **1次の微分形式**と呼ぶ. 空間の各点にベクトル場を対応させる写像をベクトル場と呼ぶ．1次の交代形式の全体は線形空間（3次元）をなす.

ここで，dx, dy, dz を基底とした線形写像 $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x,\ dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y,\ dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

を考えると，任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

と1次の交代形式

$$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$$

は対応している．同様に，ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + f_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + f_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と1次の微分形式

$$f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$$

は対応している．

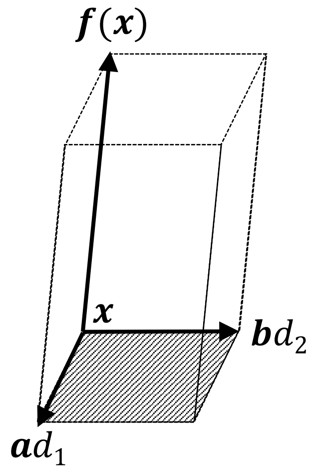
また，線積分の式を1次の微分形式 ω を用いて表すと

$$\begin{aligned} &\int_r \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt'(a_i) d_i \\ \Rightarrow &\int_r \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

となる．

3.6　2次の交代形式

次に流れの場（例えば水の流れ）について考える．点 $\boldsymbol{x}$ での流れは, $\boldsymbol{x}$ を起点として2つのベクトル $\boldsymbol{a}d_1, \boldsymbol{b}d_2$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい．（ただし $d_1, d_2 \in D,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.）このとき求める体



積は次のようになる（ただし θ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面と $\boldsymbol{f}$ の角度)：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a}d_1 \times \boldsymbol{b}d_2) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))\, d_1 d_2$$

ここで先ほどと同様に $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を考える．これは $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．外積は二重線形性, 交代性をもつため, これを **2次の交代形式**という．空間の各点に2次の交代形式を対応させたものを **2次の微分形式**と呼ぶ．2次の交代形式の全体は線形空間（3次元）をなす．

ここで，以下のくさび形積 ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$dy \wedge dz : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

を考えると，任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

と 2 次の交代形式

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

は対応している．

同様に，ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + f_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + f_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と 2 次の微分形式

$$f_1(x,y,z) dy \wedge dz + f_2(x,y,z) dz \wedge dx + f_3(x,y,z) dx \wedge dy$$

は対応している．

また面積分の式を 2 次の微分形式 ω を用いて表すと次のようになる．

$$\begin{aligned} &\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_b^{b'} \int_a^{a'} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(s,t)\right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s,t) \right) dsdt \\ \Rightarrow &\iint_\Sigma \omega = \int_b^{b'} \int_a^{a'} \omega\left(\Sigma(s,t)\right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s,t) \right) dsdt \end{aligned}$$

§ 3 次の交代形式

1 次，2 次と同様に，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \mapsto \varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ において，任意のベクトルを入れ替えても線型となる場合，これを三重線形といい，また任意のベクトルを入れ替えて符号が変わる場合，交代性を持つという．

3.7　古典的な解析と微分形式の対応関係

スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係は以下のように表せる．

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{古典的解析} & \text{スカラー場} & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \text{スカラー場} \\
 & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{微分形式} & \text{0次} & \xrightarrow{d} & \text{1次} & \xrightarrow{d} & \text{2次} & \xrightarrow{d} & \text{3次}
\end{array}
$$

ここで $grad$ は，成分が φ の偏微分で与えられる以下のベクトル場，つまり $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ において，

$$\varphi'(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x})dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x})dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x})dz$$

で表される．

§ 今週のレポート課題

（先週の課題）

V.

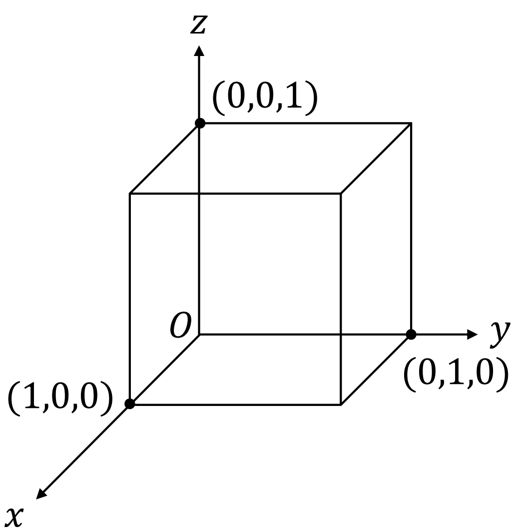
ベクトル場 $\boldsymbol{r}:(x,y,z)\mapsto(x,y,z)$ において，$x^2+y^2=a^2$, $z=0$ を線積分せよ

VI.

$V.$ と同じベクトル場 $\boldsymbol{r}$ において，$x^2+y^2+z^2=a^2$ を面積分せよ

VII.

$V.$ と同じベクトル場 $\boldsymbol{r}$ において，下図の六面体について面積分せよ



（今週分）

I.

3 次の行列式 $det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は三重線形であるが，任意の 3 次の交代形式は，$\alpha\ det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$（$\alpha$は任意のスカラー）で表されることを示せ．