2017年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2017
URL	http://hdl.handle.net/2241/00148434

情報数学III講義（第3回）

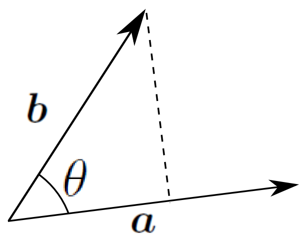
平成29年10月18日

2.2　内積（スカラー積）

次に内積について考える．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表し，以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\boldsymbol{a}| \underbrace{|\boldsymbol{b}| \cos\theta}_{\text{正射影の影の長さ}}$$

（ただし $\stackrel{\text{def}}{=}$ は左を右で定義する記号.）このように内積は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ というベクトルからスカラーへの写像となり，ゆえにスカラー積と呼ばれる.



以下に内積の性質を示す：

内積の性質

$$\begin{aligned}
&(1) \quad & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \\
&(2) \quad & (\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} &= \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
& & \boldsymbol{a} \cdot (\beta \boldsymbol{b}) &= \beta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}) \\
&(3) \quad & (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_2
\end{aligned}$$

性質 (1)(2) は内積の定義より明らか．性質 (3) の初めの式は $|\boldsymbol{a}| \cos\theta$ は $\boldsymbol{b}$ への正射影の大きさとなることから証明される．性質 (1) を対称性と呼び，性質 (2),(3) を合わせて二重線形性と呼ぶ.

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の内積は以下のようになる：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i &= 1 \\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= 0 \end{aligned}$$

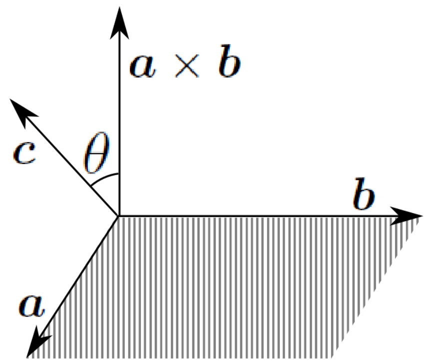
ここで $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, +a_3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$ と表すと，それらの内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, +a_3\boldsymbol{e}_3) \cdot (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_1 \underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1}_{1} + a_1b_2 \underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2}_{0} + a_1b_3 \underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3}_{0} \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1}_{0} + a_2b_2 \underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2}_{1} + a_2b_3 \underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}_{0} \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1}_{0} + a_3b_2 \underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2}_{0} + a_3b_3 \underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3}_{1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

となり, 内積の解析的な定義が導けた.

2.3 外積（ベクトル積）

次に外積について考える. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の外積を $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と表記し,「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面に右手系になるように直行するベクトルで, 大きさが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積であるもの」と定義する. このとき外積は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ というベクトルからベクトルへの写像となり, ゆえにベクトル積と呼ばれる.



以下に外積の性質を示す：

外積の性質

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad & \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \\
&(2) \quad & (\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} &= \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\
& & \boldsymbol{a}\times(\beta\boldsymbol{b}) &= \beta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad (\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}) \\
&(3) \quad & (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2
\end{aligned}
$$

性質 (1),(2) は外積の定義より明らか．性質 (3) について説明する．第 2 回講義で符号付き体積 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ について触れたが，これをベクトル積を用いて表すと以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \underbrace{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}_{\text{底面積}}\,\underbrace{|\boldsymbol{c}|\cos\theta}_{\text{高さ}} \\
&= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は 2 つのベクトルが張る平行四辺形に直交するベクトルであり，大きさ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ は平行四辺形の面積（底面積）と等しい．このベクトルに対する $\boldsymbol{c}$ の正射影は平行六面体の高さと等しいので，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$ は $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と一致する．ここで，体積 V に関しては三重線形性を示してあるので，これを利用して $V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を展開して整理する．

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) && \text{（上式より）} \\
&= V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) && \text{（符号付き体積の性質より）} \\
&= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} && \text{（上式より）} \\
&= \{(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})$ とおくと，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}$ が示されたことがわかる．したがって $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{c}=0$ である．このとき，$\boldsymbol{c}$ には $\mathbb{R}^n$ 中の任意のベクトルを代入できるため，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とすれば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=0$ となり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ が得られる．以上より，性質 (3) の一つ目の式が成立することが示せた．$\boldsymbol{b}$ についても同様の式が成り立つため，外積は二重線形性を持つことがわかる．

ここで $n=3$ とする．$\mathbb{R}^3$ の標準基底

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
$$

の外積は以下のとおりである:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3 \\
&\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1 \\
&\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2 \\
&\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=0
\end{aligned}
$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

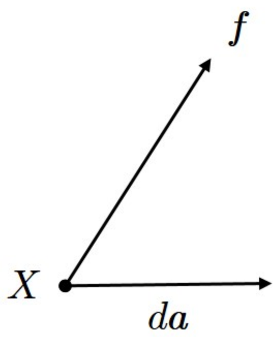
と置けば, 外積の二重線形性を用いて $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を展開し（内積の場合と同様に）解析的な定義を得られる.

3　ベクトル解析

ここからベクトル解析に入る．ベクトル解析は電磁気学のために作られた数学で, 主に3次元空間, ベクトル場とスカラー場を扱う．スカラー場とは空間の各点にスカラーを対応させせることである．例えば部屋の各店に温度や湿度を対応させたものはスカラー場となる．一方, ベクトル場とは空間の各点にベクトルを対応させるもののことである．ベクトル場の代表的なものとしては力の場と流れの場がある．例えば地球上の各点では地球の中心に向かって引力が働いている．力はベクトル（向きと大きさをもつ）で, これは力の場の例である．流れの場としては部屋の空気の流れや水の流れなどが挙げられる．

§ 力の場

空間の各点に力が働いているとして, 私たちはそれをどのように観測したらよいのだろうか．近代科学は実験・観測に基づく学問であり, 観測できないもの（例えば神など）は対象にできない．そこで力そのものを観測するかわりに, 力の場で移動を行った際に発生する仕事量を観測することを考える．仕事量は例えば熱に変換することで観測することができる．



点 X で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, X からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$$

である．（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）

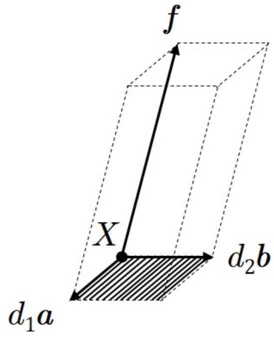
§ 流れの場

次に流れの場（例えば水の流れ）について考える．点 X での流れは, X を起点として 2 つのベクトル $d_1\boldsymbol{a}, d_2\boldsymbol{b}$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい（ただし $d_1, d_2 \in D, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$）．このとき求める体積は

$$|d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}||\boldsymbol{f}| \cos\theta = (d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f} = d_1 d_2 (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}$$

（ただしθは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面と $\boldsymbol{f}$ の角度）

となる.

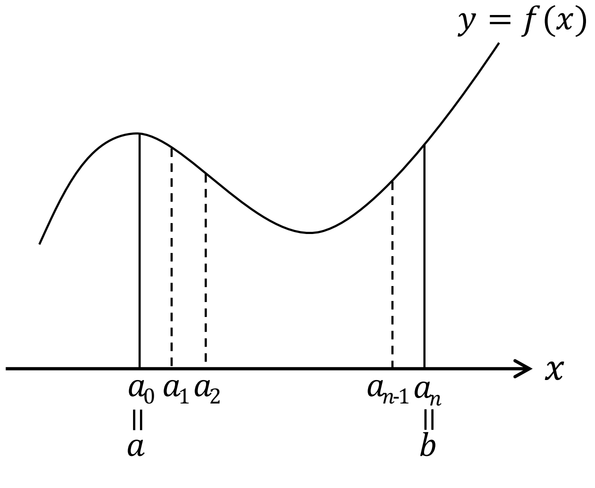


3.1　微積分学の基本定理

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であり，F が f の原始関数であるとき，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．高校の微分の定義は極限を使って定義するが，これについて考える．



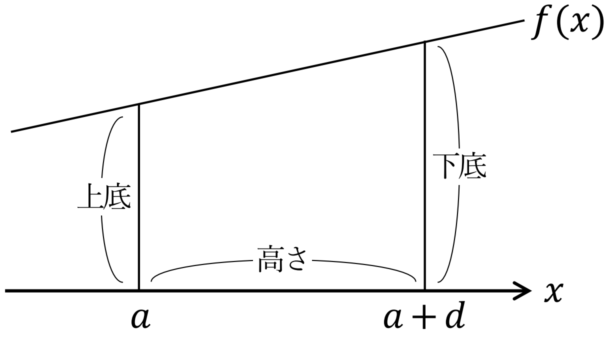
上図のように $y = f(x)$ の区間 $[a,b]$ を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．そうすると，

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

となる．なお，$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$ となるくらい細かくする．このとき，a_i の隣の点は $a_{i+1} = a_i + d_i$ と表せる．ここで，次の積分を考える．

$$\int_a^{a+d} f(x)dx$$

Kock-Lawvere の公理より，$f(x)$ は直線になる．したがって，細分した各領域の面積を得るには台形の面積を算出すれば良いことになる．



台形の面積は $\{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times (\text{高さ})/2$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int_a^{a+d} f(x)dx &= \frac{1}{2}d(f(a) + f(a+d)) \\
&= \frac{1}{2}d(f(a) + f(a) + f'(a)d) \\
&= d \cdot f(a) && (\because d^2 = 0)
\end{aligned}
$$

となる．これは微積分学の基本定理である．Kock-Lawvere の公理より，任意の d に対して αd となるような実数 α が一意的に定まる．

$$
\underbrace{\int_a^{a+d} f(x)dx}_{f(a)d} \;=\; F(a+d) - F(a) \;=\; \alpha d
$$

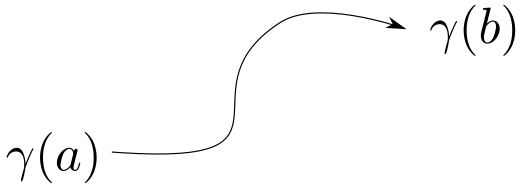
つまり,「無限小のレベル」で微積分学の基本定理が成り立つように微分係数を定義したということである．これらを用いて実際に $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対しての積分を整理すると

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \;&=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\
&=\; \sum_{i=0}^{n-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) \\
&=\; (F(a_1) - F(a_0)) + (F(a_2) - F(a_1)) + \cdots \\
&=\; F(a_n) - F(a_0) \\
&=\; F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

となる．

3.2 線積分

線積分とは，ベクトル場を力の場とした場合において，ある経路に沿って動いた際にどのくらい仕事をしたのか考えることである．線積分を計算する場合はパラメータは自由でかまわないが，どちらが始点でどちらが終点か向きをつける必要がある．



ここで下図のような $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ という空間中の曲線に沿って動いたときにどれだけ仕事がされるかについて考える．

力 $\boldsymbol{f}$ の中で曲線 γ に沿って動いたとき，

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

という仕事がなされる（参考：力学的な仕事を表す式は $W = F \cdot s$）．

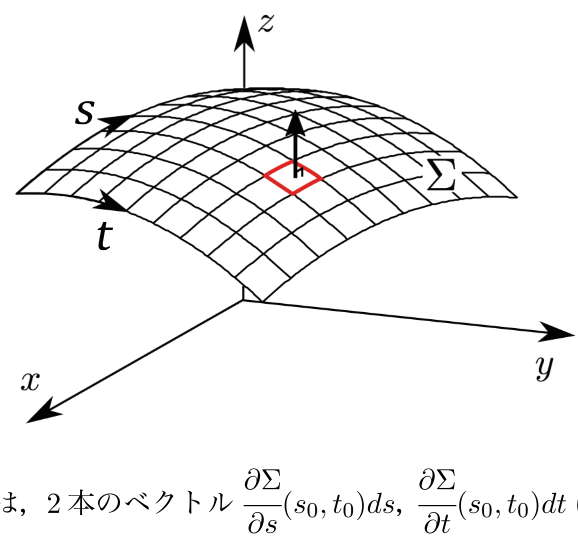
$[a,b] \mapsto t$ とすると，

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \ = \ \int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

とおける．

3.3　面積分

それぞれの区間 $[a_1, b_1] \in s$，$[a_2, b_2] \in t$ について，曲面 $\Sigma(s,t) \to \mathbb{R}^3$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が定義されているとする．このとき，曲面 Σ を細分して微小領域ごとに面積の大きさの法線ベクトルを考える．



このとき微小領域は，2 本のベクトル $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial s}(s_0, t_0)ds$，$\dfrac{\partial \Sigma}{\partial t}(s_0, t_0)dt$ によって張られることを確認する．

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲面 Σ 上の面積分は，この法線ベクトルとベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の内積を，曲面 Σ 上のすべての微小領域にわたって加えた和で表せる．

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\boldsymbol{f}\left(\Sigma(s,t)\right)\cdot\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s,t)\right)dsdt\end{aligned}$$

線積分はベクトル場を力の場と考えて曲線に沿って動いた時にどれくらいの仕事をするかを考えたが，面積分ではベクトル場を流れの場として，単位時間にどれだけの流量が面を横切るかを考えている．このとき，パラメータの定義は自由だが，線積分と同様に向きをつけることが重要である．特に球面のように内と外を分ける（境界がない）曲面では外向きを表にする．表と裏を入れ替えた曲面を $-\Sigma$ で表すと，

$$\iint_{-\Sigma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; -\iint_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．

曲面の境界は曲線であるため，こちらも向きが重要となる．境界の向きは，曲面の表に旗を立ててやり，左手に旗が見えるように回るのが順方向と定義される．

3.4　極座標

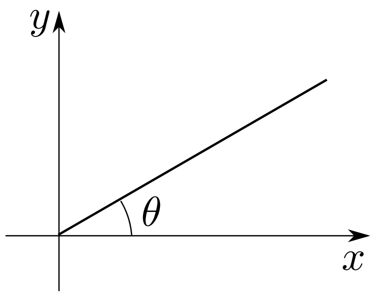
§ 平面

極座標では (x,y) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と x 軸の正方向の成す角 θ で表す．

直交座標 (x,y) との関係は以下の通りである．

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

なお，$0\leq\theta\leq 2\pi$ である．



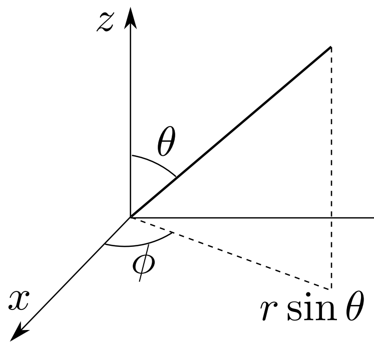
§ 空間

空間では (x, y, z) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と z 軸の正方向の成す角 θ と，xy 平面上の r の正射影 $r\sin\theta$ と x 軸の成す角 ϕ で表す．

直交座標 (x, y, z) との関係は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

なお，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．

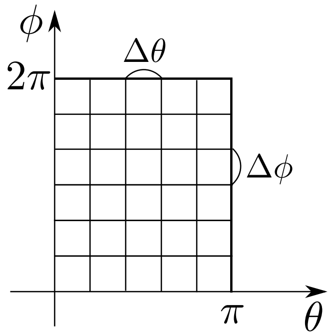


§ 球の表面積の考え方

原点 O を中心とする半径 a の球面を考える．球の表面を Σ，(θ, ϕ) に対する球面上の点を $\Sigma(\theta, \phi)$ とする．この媒介変数表示は以下のようになる．

$$
\Sigma(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi \\ a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}
$$

なお，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．このとき，球の表面積を求めるためには，図のようにパラメータを細分する．



ただし，$\Delta\theta \in D$, $\Delta\phi \in D$ とする．この細かく分けた小さな部分は，直交座標では微小な平行四辺形になっているためその面積を求める．平行四辺形の面積は，2 つのベクトルのベクトル積の大きさ：

$$\left|\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\Delta\theta \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}\Delta\phi\right|$$

を求めれば良いことになる．したがって，球の表面積はすべて加え合わせれば求まるので，積分を用いて以下を計算する．

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}\right| d\theta d\phi$$

実際に計算するとそれぞれの偏微分は，

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi \\ a\cos\theta\sin\phi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\phi \\ a\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．