2017年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2017
URL	http://hdl.handle.net/2241/00148434

情報数学III講義（第2回）

平成28年10月12日

1.7 様々な写像 (Projections)

これまで $\mathbb{R}$ への関数を見てきたが，他にも $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ への関数，たとえば

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{（平面上の運動）}$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{（空間上の運動）}$$

などが考えられる．例えば $\mathbb{R}$ を時間，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点，$\mathbb{R}^3$ を空間内の点とすれば，上の二つは平面上の運動，空間内での運動を表す関数と考えられる．

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ の場合

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  と多変数の微分を行列の積で表すことができる．

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合

  f を $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の 2 つに分けて $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ と置ける

とする．

$z_1 = f_1(x,y), z_2 = f_2(x,y)$ とすると以下のように表せ，

$$\Delta z_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$\Delta z_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

これらをまとめることで，

$$\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

と行列の積で表せる．

以上をまとめると，

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の関数を微分すると比例関係が出る．
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の関数を偏微分すると行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ が出る．
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の関数を偏微分すると $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ が出る．
- さらに $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ の関数を偏微分すると $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ が出る

このように，線形写像を行列の形で考えることが出来る．

1.8　行列表現

関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して微分 f' は線型写像 $f':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ と考えることができる．いま，$\boldsymbol{e}_1=(1\ 0\ \cdots\ 0)^T$ として $f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)$ について考える．公理より以下のようになる．

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_1 d) \;=\; f(\boldsymbol{x})+f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)d$$

x_2から x_n は動かしていないので，x_1 で偏微分していることになる．よって，以下のように表せる．

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_1 d) \;=\; f(\boldsymbol{x})+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})d$$

次に，$\boldsymbol{a}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$ について考える．これは線型写像なのでそれぞれに分けられることを思い出すと，以下のように整理できる．

$$\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{x})(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n)\\
&= a\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})}+a_2\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})}+\cdots+a_n\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})}\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ のとき，$f':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $1\times n$ 行列で表せる．

1.9　多変数の微分 (Derivative of Multivariate functions)

- 1 変数 $y=f(x)$ の場合
  $f(x)$ 上にある点を (x_0,y_0) として，x の変化量 $\Delta x=x-x_0$ と y の変化量 $\Delta y=y-y_0$ について考える．このとき Δy は $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ と一般的に複雑な形になる．この複雑な $f(x)$ による関数を簡単にするため，点 (x_0,y_0) における接線を用いて近似すると $\Delta y=a\Delta x$ (a は定数, $a=f'(x_0)$) のようにひとつの数で特徴付けられた比例関数で表せる．

- 2 変数 $z=f(x,y)$ の場合

  $z_0=f(x_0,f_0)$ とする．x の変化量 $\Delta x=x-x_0$，y の変化量 $\Delta y=y-y_0$ に対して z の変化量 $\Delta z=z-z_0$ について考える．関数 z を微分すると接平面が得られ，$\Delta z=a\Delta x+b\Delta y$ (a,b は定数) と表せる．a を求めるには，$f(x)$ を $\Delta y=0$ と y の値を固定して得られる x の 1 変数関数 $f(x,y_0)$ とみなして x で微分すればよい．

  $$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

  同様に，b を求めるには $\Delta x=0$ とする．

  $$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

  これを偏微分と呼ぶ．a を求める偏微分のイメージは，図**??**のような風呂敷状のグラフを xy 平面と平行に切断して得られる断面での微分といえる．

1.10 合成関数の微分 (Derivative of compound functions)

$\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ のとき，合成関数 $g\circ f$ の微分は以下で表される．

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

多変数の合成関数の微分を行うために，これを一般化する．$\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^l$ のとき，合成関数 $g\circ f$ の微分は以下で表される．

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{x})=\underbrace{g'(f(\boldsymbol{x}))}_{l\times m}\cdot\underbrace{f'(\boldsymbol{x})}_{m\times n}$$

定理

関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l, g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$に対して $\boldsymbol{x_0}\in\mathbb{R}^n$ としたとき，以下の式が成り立つ．

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{x_0})=g(f'(\boldsymbol{x_0}))\cdot f'(\boldsymbol{x_0})$$

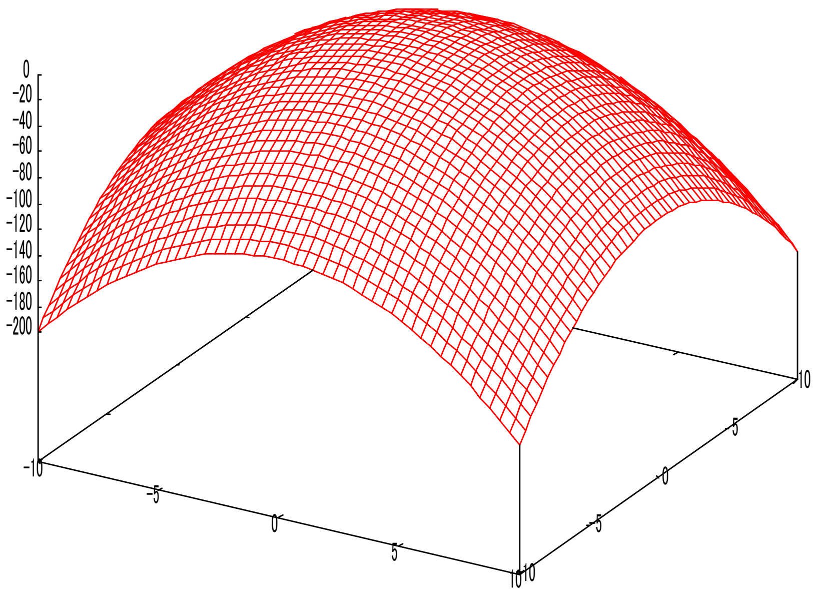


図 1: $z = f(x, y)$ のグラフ

この定理は以下のように証明できる．$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, d \in D$ とする

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d) &= g(f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d)) \\
&= g(f(\boldsymbol{x_0}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})d) \\
&= g(f(\boldsymbol{x_0})) + g'(f(\boldsymbol{x_0}))(f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a}))d \\
&= g(f(\boldsymbol{x_0})) + (g'(f(\boldsymbol{x_0})) \circ f'(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{a})d
\end{aligned}
$$

例えば，1 変数の場合は 1×1 の行列の積と考えればよい．
また，$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ の場合は $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \to z$ と表され，微分は以下のようになる．

$$
g'((f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} f(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \quad 1 \times 2 \text{ の行列}
$$

$$
f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ の行列}
$$

最終的に，行列を掛け算すると以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このように，線形写像の合成を行列の掛け算で記述することが出来る．

1.11 多変数のKock-Lawvereの公理 (Kock-Lawvere Axiom for multiple variables

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : d \in D \mapsto f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d) \in \mathbb{R}^m$ という関数に対して，多変数の Kock-Lawvere の公理から以下が成り立つ．

$$
\exists! \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \quad \text{s.t.} \quad \varphi(d) = \varphi(0) + \boldsymbol{b}d \tag{1}
$$

このただひとつの $\boldsymbol{b}$ を $f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ と書く．$f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{x_0}$ にも $\boldsymbol{a}$ にも依存する．ここで，$f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ が以下の二つを満たした線形変換であることを示す．ただし，$\boldsymbol{a_1} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ である．

$$
f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) = f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2}) \tag{2}
$$

$$
f'(\boldsymbol{x_0})(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a}) \tag{3}
$$

- (5) の証明

$$
f(\boldsymbol{x_0} + (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})d) = f(\boldsymbol{x_0}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})d
$$

であることと，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x_0}+(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})d) &= f((\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{a_1}d)+\boldsymbol{a_2}d)\\
&= f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{a_1}d)+f'(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{a_1}d)(\boldsymbol{a_2})d\\
&= f(\boldsymbol{x_0})+f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d+\{f'(\boldsymbol{x_0})+f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d\}(\boldsymbol{a_2})d\\
&= f(\boldsymbol{x_0})+f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d+f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2})d+f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})(\boldsymbol{a_2})d^2\\
&= f(\boldsymbol{x_0})+\{f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})+f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2})\}d
\end{aligned}
$$

からわかる．

- (6) の証明

$$
f(\boldsymbol{x_0}+(\alpha\boldsymbol{a})d)=f(\boldsymbol{x_0})+f'(\boldsymbol{x_0})(\alpha\boldsymbol{a})d
$$

であることと，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{a}(\alpha d)) &= f(\boldsymbol{x_0})+f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})(\alpha d)\\
&= f(\boldsymbol{x_0})+\alpha f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})d
\end{aligned}
$$

からわかる．

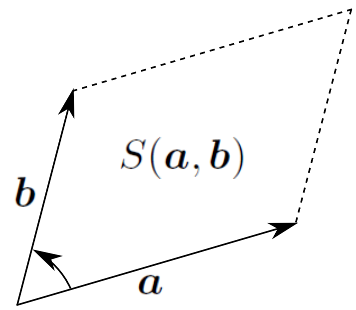
2.1 行列式　(Determinant)

ここでは行列式が何を表しているのかを, 特に 2 次元（平面）と 3 次元（空間）の場合において議論する.

§ 平面 ; $\mathbb{R}^2$

ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$ によって張られる平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と表す．

ただし，これは符号がついた面積であり，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ回った時に，反時計回りであれば正，時計回りであれば負と定義される面積とする（右手系）． このとき S について以下に示す 3 つの性質が成り立つ：



平行四辺形の符号付き面積の性質

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & = & -S(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \\
(2) & S(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & = & \alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\
 & S(\boldsymbol{a},\beta\boldsymbol{b}) & = & \beta S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\
(3) & S(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}) & = & S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b})+S(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}) \\
 & S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) & = & S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)+S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)
\end{array}
$$

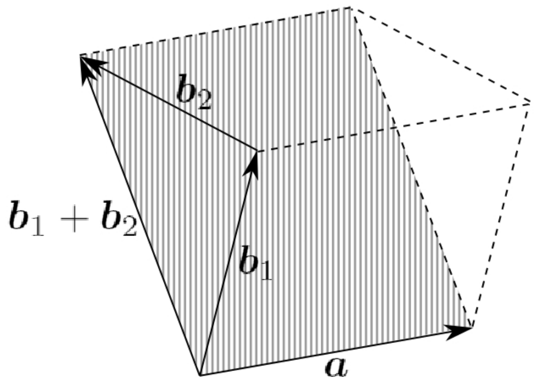
性質 (1)(2) は符号の決め方や平行四辺形の形状がどうなるかを考えれば明らか. (1) について, 特に $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{b}$ の場合直ちに次が導ける：

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) &= -S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \\
\therefore S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) &= 0.
\end{aligned}
$$

これは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ なので平行四辺形がつぶれてしまっていて面積が 0 になっているととらえればわかりやすい. 性質 (3) について説明する．これは以下の図において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ により張られる 2 つの平行四辺形が，斜線で示した $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ で張られる平行四辺形と面積が一致することを表す．斜線内に存在する三角形と斜線外の三角形は合同なのは明らかであるため両辺が等しくなる．(1) を交代性と呼ぶ. また (2)(3) を合わせて二重線形性と呼ぶ.

さて, ここで $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ について考えると，

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) &= S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) = 0, \\
S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) &= 1, \\
S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) &= -1.
\end{aligned}
$$



となる．このとき $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$ と表して面積 S を考える．

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= S(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= a_1b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_1b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}_{=1} + a_2b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)}_{=-1} + a_2b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)}_{=0} \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

これは紛れも無く行列式 (determinant)：

$$\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

の解析的な定義である．私たちがこれまで使っていた 2 次行列の行列式は, 行列を構成する 2 本のベクトルがつくる平行四辺形の面積を表していたのである.

§ 空間；$\mathbb{R}^3$

ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ で形成される平行六面体の符号付き体積を $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と定義する．符号は，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回した時に，ねじが進む方向に $\boldsymbol{c}$ が向いていれば正，反対側ならば負とする（右手系）．このとき V について以下に示す 3 つの性質が成り立つ：

平行六面体の符号付き体積の性質

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= -V(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = -V(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = -V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) \\
(2) \qquad V(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
V(\boldsymbol{a},\beta\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \beta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\gamma\boldsymbol{c}) &= \gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
(3) \qquad S(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}) &= V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}) \\
S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2) &= V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)+V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)
\end{aligned}
$$

性質 (1) は引数のどれかを入れ替えると符号が反転することを意味している．これを 2 次元の場合と同様に交代性と呼ぶ．また (2)(3) を合わせて三重線形性と呼ぶ．（今回の講義では三重線形性の証明を二重線形性と同様と述べたが, 次回の講義で補足を設けるとのこと.）

ここで先ほどと同様に $\mathbb{R}^3$ の標準基底：

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

によって張られる平行六面体を考える．V の定義より $V(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$ であり, そこに性質 (1) を繰り返し適用することで次を得る：

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) &= V(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1) = V(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 1, \\
V(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2) &= V(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) = V(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) = -1.
\end{aligned}
$$

最後に，平面のときと同様にそれぞれのベクトルを

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

とおいて $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を計算すると，

$$
V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

のように $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を列ベクトルとしてもつ行列の行列式が出てくる．