

## Some Results on Wavelet Expansions

|          |   |
|----------|---|
| 著者       | Suzuki Toshio   |
| 著者別名     | 鈴木 俊夫   |
| 発行年      | 2017  |
| その他のタイトル | ウェーブレット展開におけるいくつかの結果  |
| 学位授与大学   | 筑波大学 (University of Tsukuba)  |
| 学位授与年度   | 2016  |
| 報告番号     | 12102甲第8014号  |
| URL      | <a href="http://hdl.handle.net/2241/00147720">http://hdl.handle.net/2241/00147720</a> |

|         |                  |
|---------|------------------|
| 氏名      | 鈴木 俊夫            |
| 学位の種類   | 博士 (理学)          |
| 学位記番号   | 博 甲 第 8014 号     |
| 学位授与年月日 | 平成 29 年 3 月 24 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第4条第1項該当     |
| 審査研究科   | 数理解物質科学研究科       |
| 学位論文題目  |                  |

**Some Results on Wavelet Expansions**

( ウェーブレット展開におけるいくつかの結果 )

|    |         |          |       |
|----|---------|----------|-------|
| 主査 | 筑波大学准教授 | 博士(理学)   | 木下 保  |
| 副査 | 筑波大学教授  | 博士(数理科学) | 竹内 潔  |
| 副査 | 筑波大学教授  | 博士(理学)   | 笥 知之  |
| 副査 | 筑波大学講師  | 博士(理学)   | 久保 隆徹 |

論 文 の 要 旨

本論文は、離散ウェーブレット展開に関する次の4つの章から成る。

1. ウェーブレット解析
2. ウェーブレット展開の無条件収束性
3. 高木関数とそのウェーブレット展開
4. Distortion の特徴量の抽出

2 章、3 章はウェーブレット理論に関するテーマであり、4 章はウェーブレットの応用に関するテーマである。互いに独立した結果であるが、いずれも Sobolev 空間と深く関係していることに注目して、各テーマについて一つずつ要旨を述べる。

1. ウェーブレット解析) 時間周波数解析の一つであるウェーブレット解析は、物理、化学、産業界など様々な分野へ応用されている。1909 年に登場した Haar ウェーブレットがその起源とされているが、1975 年に Morlet が石油探査に導入してから様々な発展を遂げてきている。ウェーブレット解析は三角関数の基底を用いる Fourier 解析のような手法であるが、基底の台は無限大の幅に限らず、コンパクトな場合も導入できることが応用上大きな魅力である(そのため、小さな波を意味するウェーブレットと呼ばれるようになった)。 $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数  $\phi$  を雛形として、離散ウェーブレット展開と連続ウェーブレット変換の2つの考え方ができる。離散ウェーブレット展開の場合では、離散パラメータ  $j, k$  による集合  $\{2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k)\}$  が  $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となるときに  $\phi$  を直交ウェーブレットという。このとき MRA(多重解像度解析)の概

念を導入すれば、ローパスフィルタを利用して形式的に  $\phi$  を構成することが可能である。第 2 章において Stromberg ウェーブレットが、第 3 章において Haar ウェーブレットが用いられている。また、連続ウェーブレット変換は積分変換であり、核となる連続パラメータ  $a, b$  を持つ関数  $a^{-1/2} \phi((t-b)/a)$  と内積をとることで定義される。第 4 章において変則的な Haar ウェーブレットが用いられることになる。

2. ウェーブレット展開の無条件収束性) フーリエ級数の無条件収束性に関してはよく知られている。無条件収束とは展開式の順序と無関係に収束することであり、展開される関数の滑らかさが  $C^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) でなお且つソボレフ空間  $W\{1,1\}$  に属すならば無条件収束する。一方、ウェーブレット展開の場合には、ウェーブレット基底を取り替える度に展開式がまったく異なるため非常に多様性の増すことが予想される。まずは展開される関数を Sobolev 空間  $W\{1,1\}$  に属するものをターゲットとして考え、収束スピードである位相も同じく  $W\{1,1\}$  を想定する。このとき、ウェーブレット基底も  $W\{1,1\}$  である仮定をすると、無条件収束することが直ちにわかる(命題 2.1)。そこで、本論文の主定理は Sobolev 空間  $W\{1,1\}$  よりも滑らかでない関数を展開した場合に、一様収束するにもかかわらず無条件収束しないような関数が存在することを主張している。証明では、具体例の構成することを目標としており、非常にデリケートな計算を行っている。その際、Lipschitz 連続(有界区間の場合  $W\{1,1\}$  が含む最も滑らかな関数空間)である Stromberg ウェーブレットを有効活用している点がアイデアである。

3. 高木関数とそのウェーブレット展開) 高木関数は、2 の冪の係数と Lipschitz 連続な B スプラインを用いて関数項級数の形で定義され、至るところ微分不可能となる有名な関数である。また、級数の係数部分を  $p$  の冪に変更することにより、一般化された高木関数を考えることもできる。高木関数において微分不可能な状況とは差分商の極限が無限大となるか振動するかのどちらかであるが、特に無限大となるための必要十分条件が Allaart 氏、Kawamura 氏、Kruppel 氏らにより示された。彼らの研究によると、場所の点の値を 2 進法にしたときに 1 が登場する桁の番号に着目して特徴付けがなされている。本論文では、一般化された高木関数の微分不可能となる点を  $p$  進法にして特徴付けを与えている。特に具体例として  $p=3$  のときに Cantor 集合上で微分不可能となるような関数を構成できることは興味深いと思われる。また高木関数とは別に、Baire category 定理によっても微分不可能な関数の存在が抽象的に示されることが知られている。その際用いられる可算個の閉部分集合の族がウェーブレットの理論における MRA(多重解像度解析)の階層に対応することに注目し、高木関数に対しても Haar ウェーブレット展開を試みたり、超関数の意味での微分を考慮して Sobolev 空間のノルムの計算なども行っている。

4. Distortion サウンドの特徴量の抽出) 楽器の音色の検知を目的として、ウェーブレットの応用を考察している。エレキギターは Distortion サウンドへと加工されることが多い。Distortion サウンドはいわゆる音が歪んだ状態を意味するが、電気的な信号処理の中で 2 段階のメカニズムで発生する非線形変換とされている。まず音の元信号をある定数倍に拡大し、次にある閾値で信号をカットする処理(クリッピング)がなされる。Fourier 変換に比べ局所的な解析が可能なウェーブレット変換が有効であると期待できる。これまで Distortion のかかり具合を表す指標として Total Harmonic Distortion と呼ばれる量が広く使われてきたが、本論文では以下の 3 つの特徴量の抽出方法が提案されている。

- (i) 拡大された信号は局所的に導関数が非常に大きくなるため、連続ウェーブレット変換を用いて  $C^1$  空間のノルムで測る。
- (ii) 拡大された信号はクリッピングされて上から押さえられていても区間全体の面積が若干大きくなることに注目して、 $L^2$  空間のノルムで測る。
- (iii) クリッピングされた信号は局所的に導関数の大きさが非常に高くても、導関数の区間全体の積分量は Distortion のかかり具合に反比例し小さくなることに注目して、斉次な 1 階の Sobolev 空間のノルムで測る。

ただし、(i)と(iii)では実際の特徴をより引き出すために、ウェーブレット関数  $a^{-1/2} \psi((t-b)/a)$  の係数を変則的に切り替えている。最終的に被験者実験も行い、Distortion サウンドの特徴量を捉えていることが実証されている。

## 審 査 の 要 旨

〔批評〕

ウェーブレット解析の研究者は理論だけでなく応用も重視して研究することが望ましい。本論文の離散ウェーブレット展開の収束性に関する議論(第2章)や抽象的な高木関数の離散ウェーブレット展開(第3章)は理論と応用を結び付けるものだと考えられ、実践的な音響工学への応用(第4章)にも取り組んでいる。鈴木氏は数学と工学の高度な専門知識を十分身につけているため、両方の分野の研究会で成果発表を行ってきており、独創的な理論にもとづいた数値実験等は工学分野からの期待も高い。学位論文は魅力的な研究テーマから成り、学術的な価値も高いと評価できる。

以上のことから、鈴木氏は今後も幅広く活躍する研究者であり、鈴木氏の研究は学位に値すると結論される。

〔最終試験結果〕

平成 29 年 2 月 16 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。