2016年度 情報数学III

情報数学III講義（第8回）

平成28年12月7日

1.1 ナブラ

∇（ナブラ，nabla）というものを導入する．これは形式的に $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される擬似ベクトルとして表現される．∇ を用いて $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ を表すことができる．

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対して，

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

によって定義されるベクトル場をスカラー場 φ の勾配という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{f} &= \mathrm{rot}\boldsymbol{f} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

によって定義されるスカラー場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転という．同様に，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \mathrm{div}\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

によって定義されるベクトル場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の発散という．∇ を疑似ベクトルと考えることで，以下の性質が次のように整理できる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) &= \nabla \times (\nabla\varphi) \\
&= (\nabla \times \nabla)\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) \\
&= \det(\nabla, \nabla, \boldsymbol{f}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

1.2　くさび形積

1 次の交代形式を持つ $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$ に対して，

$$
(\omega_1 \wedge \omega_2)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \; = \; \omega_1(\boldsymbol{a})\omega_2(\boldsymbol{b}) - \omega_1(\boldsymbol{b})\omega_2(\boldsymbol{a})
$$

は，二重線型かつ 2 次の交代形式である．また，dx, dy を用いて書いているときは，

$$
\begin{aligned}
(dx \wedge dy) \; &= \; \underbrace{dx(\boldsymbol{a})}_{a_1}\underbrace{dy(\boldsymbol{b})}_{b_2} - \underbrace{dx(\boldsymbol{b})}_{b_1}\underbrace{dy(\boldsymbol{a})}_{a_2} \\
&= \; a_1b_2 - b_1a_2 \; = \; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

のようになる．同様に dx, dy, dz に対して，$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)$ は，

$$
\begin{aligned}
&(dx \wedge dy \wedge dz)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
&\quad = \; dx(\boldsymbol{a})dy(\boldsymbol{b})dz(\boldsymbol{c}) + dx(\boldsymbol{b})dy(\boldsymbol{c})dz(\boldsymbol{a}) + dx(\boldsymbol{c})dy(\boldsymbol{a})dz(\boldsymbol{b}) \\
&\qquad\quad - dx(\boldsymbol{c})dy(\boldsymbol{b})dz(\boldsymbol{a}) - dx(\boldsymbol{b})dy(\boldsymbol{a})dz(\boldsymbol{c}) - dx(\boldsymbol{a})dy(\boldsymbol{c})dz(\boldsymbol{b}) \\
&\quad = \; a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \\
&\quad = \; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

1.3　スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係

今までは交代形式を用いて，積分定理が成り立つように grad を定義し，Stokes の定理が成り立つように rot を定義し，Gauss の発散定理が成り立つように div を定義した．まずは一次の微分形式をさらに微分してみる．以下ではスカラー場を φ，ベクトル場を $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ とする．

$$
d(f_1dx + f_2dy + f_3dz) = (df_1) \wedge dx + (df_2) \wedge dy + (df_3) \wedge dz
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{古典的解析} & \text{スカラー場} & \xrightarrow{grad} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{rot} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{div} & \text{スカラー場} \\
 & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{微分形式} & \text{0次} & \xrightarrow{d} & \text{1次} & \xrightarrow{d} & \text{2次} & \xrightarrow{d} & \text{3次}
\end{array}
$$

$(df_1) \wedge dx$ を具体的に計算してみると，

$$
\begin{aligned}
(df_1) \wedge dx &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial f_1}{\partial y} dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

となる． $(df_2) \wedge dy, (df_3) \wedge dz$ も同様に具体的に計算してみると，

$$
\begin{aligned}
(df_2) \wedge dy &= \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial f_2}{\partial z} dy \wedge dz \\
(df_3) \wedge dz &= \frac{\partial f_3}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial f_3}{\partial x} dz \wedge dx
\end{aligned}
$$

ゆえに，一次の微分形式を微分すると

$$
\begin{aligned}
& d(f_1dx + f_2dy + f3dz) \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

となる．これは $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ の微分形式に対応する．

次に，二次の微分形式を，$f_1dy \wedge dz + f_2dz \wedge dx + f_3dx \wedge dy$ と表す．これをさらに微分すると，

$$
\begin{aligned}
& d(f_1dy \wedge dz + f_2dz \wedge dx + f_3dx \wedge dy) \\
&= (df_1) \wedge dy \wedge dz + (df_2) \wedge dz \wedge dx + (df_3) \wedge dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

となる．$(df_1) \wedge dy \wedge dz$ を具体的に計算すると，

$$
\begin{aligned}
(df_1) \wedge dy \wedge dz &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dz \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

となる．$(df_2)\wedge dz\wedge dx, (df_3)\wedge dx\wedge dy$ も同様に具体的に計算してみると，

$$
\begin{aligned}
(df_2)\wedge dz\wedge dx &= \frac{\partial f_2}{\partial y}dx\wedge dy\wedge dz \\
(df_3)\wedge dx\wedge dy &= \frac{\partial f_3}{\partial z}dx\wedge dy\wedge dz
\end{aligned}
$$

ゆえに，二次の微分形式を微分すると

$$
d(f_1 dy\wedge dz + f_2 dz\wedge dx + f_3 dx\wedge dy) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz
$$

のようにまとめられる．

1.4　複素指数関数

$\mathbb{C}$ は線形空間で見ると $\mathbb{R}^2$ とみなすことができる．ただし，$\mathbb{C}$ では積が定義される点が異なる．また，$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$
(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)
$$

となることから可換法則も成り立つことがわかる．

次に複素指数関数では，$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して以下の指数法則が成り立つことを示す．

$$
e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{1}
$$

まずは右辺を計算してみる．

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \left(1+z_1+\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{3!}z_1^3+\cdots\right)\left(1+z_2+\frac{1}{2}z_2^2+\frac{1}{3!}z_2^3+\cdots\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i}\frac{1}{j}z_1^i z_2^j
\end{aligned}
$$

次に左辺を計算してみる．

$$
\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= \left\{1+(z_1+z_2)+\frac{1}{2}(z_1+z_2)^2+\frac{1}{3!}(z_1+z_2)^3+\cdots\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i z_1^i z_2^{n-i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{i!j!}z_1^i z_2^j \qquad\qquad (\because n-i=j) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!j!}z_1^i z_2^j
\end{aligned}
$$

ゆえに，(1) は成り立つことが示された．

1.5　複素関数の微分

これまでの講義で，1 変数の微分では比例定数 f' が，多変数の微分では線形関数が出てくることを学んだ．例えば $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の微分は，$f' : \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$，$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$，$dy : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$ と定義していた．同様に，複素数から複素数の関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で複素数の微分を定義したい．

まず，$f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ という関数を用いて $f = f_1 + if_2$ と表す．これを微分すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial x}dx\right) \end{aligned} \tag{2}$$

1 変数の微分において $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ なら $df = f'dx$ と表せた．同様に，複素数 z が $dz = dx + idy$ と書けるとすると微分が $df = g\ dz$ と表せるような g が存在するための条件を調べてみる．

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, a, b : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ に対して $g = a + ib$ と表せるとすると，

$$\begin{aligned} g\ dz &= (a + ib)(dx + idy) \\ &= (adx - bdy) + i(ady + bdx) \end{aligned} \tag{3}$$

この式 (2) と (3) を比較すると，以下の条件が得られる．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

この条件をコーシーリーマン の方程式という．またコーシーリーマン の方程式が成り立つとき，その関数を正則関数や解析関数と呼ぶ．複素関数論で対象とするのはこの方程式が成り立つ関数のみである．

例として以下の関数が正則であることを確かめる．

- $f(z) = c$ （定数関数）
  $c = c_1 + ic_2$ とする．$f_1 = c_1, f_2 = c_2$ より以下が成り立つ．

  $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則で $f'(z) = 0$.

- $f(z) = z$ （恒等関数）
  $z = x + iy$ とする．$f_1 = x, f_2 = y$ より以下が成り立つ．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則で $f'(z) = 1$.

正則関数の性質を以下に示す．

正則関数の性質

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (f+g)' &=& \ f' + g' \\
&(2) \quad (\alpha f)' &=& \ \alpha f' \\
&(3) \quad (fg)' &=& \ f'g + fg' \\
&(4) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' &=& \ \frac{f'g - fg'}{g'} \qquad (g \neq 0) \\
&(5) \quad (z^n)' &=& \ nz^{n-1}
\end{aligned}$$

g, f を正則関数だとする．微分を $df = f'(z)dz$ と表すと，

$$d(f+g) = df + dg = f'dz + g'dz = (f' + g')dz$$

となる．したがって，g, f が正則なら $f+g$ も正則であり，なおかつ，$(f+g)' = f'+g'$ が言える．また性質 (2) についても，

$$d(\alpha f) = \alpha df = \alpha f' dz$$

であるため，$(\alpha f)' = \alpha f'$ が言える．同様に，

$$d(fg) = (df)g + f(dy) = (f'dz)g + f(g'dz) = (f'g + fg')dz$$

から関数の積も正則であり，$(fg)' = f'g + fg'$ が成り立つことがわかる．これらから，定数関数や恒等関数も正則関数であるので，

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

という多項式の微分は，

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots$$

となる．三角関数や指数関数についても無限次の多項式で定義されているだけなので，これらも正則関数である．