2016年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2016
URL	http://hdl.handle.net/2241/00144102

情報数学III講義（第4回）

平成28年10月26日

1.1　カヴァリエリの原理

カヴァリエリの原理

平面の場合

２つの平面図形を平行な直線で切ったときの切り口の長さが常に等しいとき、２つの図形の面積は等しい。

立体の場合

２つの立体図形を平行な平面で切ったときの切り口の面積が常に等しいとき、２つの図形の体積は等しい。

§ 三角形の面積

図1のように底辺の長さ b と高さ a が等しい2つの三角形を考える．底辺からの高さが x となるような平行な直線で2つの三角形を切る．それぞれの切り口の長さは $\frac{a-x}{a}b$ で常に等しい．カヴァリエリの原理より2つの三角形の面積は等しい．

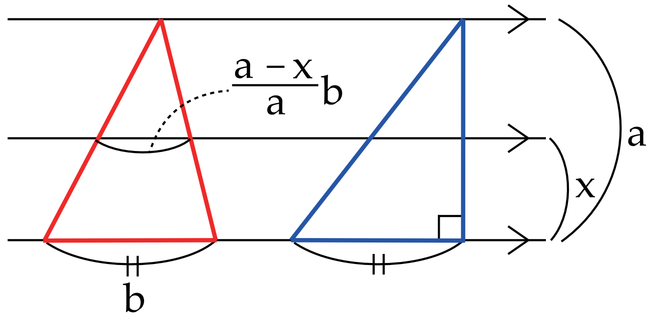
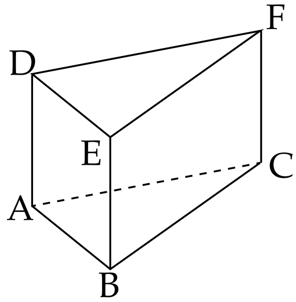


図1: 底辺の長さと高さが等しい2つの三角形

§ 三角柱の体積

図 2 のように三角柱 ABC-DEF を考える．この三角柱は 3 つの三角錐に分割できる．カヴァリエリの原理から 3 つの三角錐の体積は等しい．錐体の体積は $\frac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高さ で求められる．



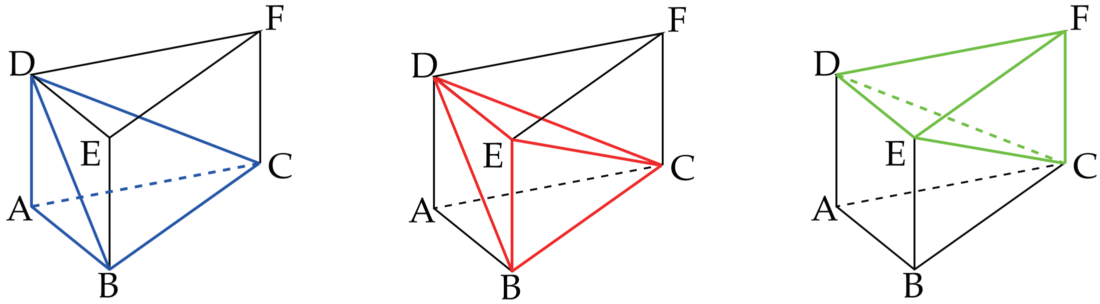


図 2: 三角柱 ABC-DEF と三角錐 C-DBA と三角錐 C-DBE と三角錐 F-DEC

§ 球の体積

図 3 のように底面の半径が R で高さが $2R$ の円柱と半径 R の球を考える．円柱において底面と平行で高さ R の面の中心と底面と上面を結んだ円錐を考える．円柱の体積は $2\pi R^3$，円錐 1 つの体積は $\frac{1}{3}\pi R^3$ である．円柱から 2 つの円錐の体積を除いた残りの部分の体積は $\frac{4}{3}\pi R^3$ となる．

次に，球と円柱から 2 つの円錐を除いた図形を，中心からの高さが x である平行面で切断したときの断面積を考える．球の断面積は $\pi(R^2-x^2)$ である．円柱から 2 つの円錐を除いた図形の断面積は $\pi R^2-\pi x^2$ である．カヴァリエリの原理より 2 つの図形の体積は等しい．よって，半径 R の球の体積は $\frac{4}{3}\pi R^3$ となることがわかる．

§ 前回の内容との関連

$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) = S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)+S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)$ が成り立つことをカヴァリエリの原理から示す．図 4 から $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)$ も $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)$ も $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)$ 底辺の長さは $\|\boldsymbol{a}\|$ で共

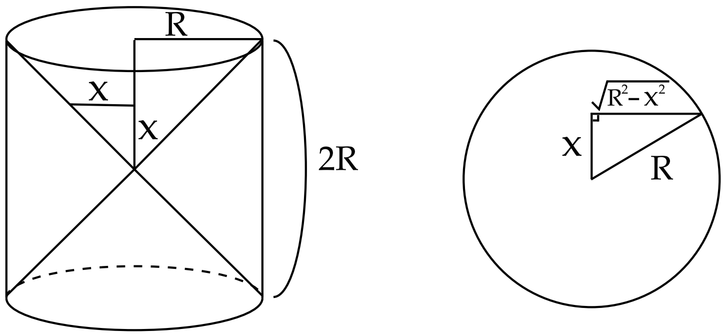


図 3: 左：底面の半径が R で高さが $2R$ の円柱
右：半径 R の球

通．$\boldsymbol{a}$ の始点を $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ に沿って動かしたときの面積が $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)$ である．$\boldsymbol{a}$ の始点を $\boldsymbol{b}_1$ に沿って動かしたときの面積が $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)$ であり，$\boldsymbol{a}$ の始点を $\boldsymbol{b}_2$ に沿って動かしたときの面積が $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)$ である．以上より，カヴァリエリの原理より $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) = S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)+S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)$ が成り立つ．

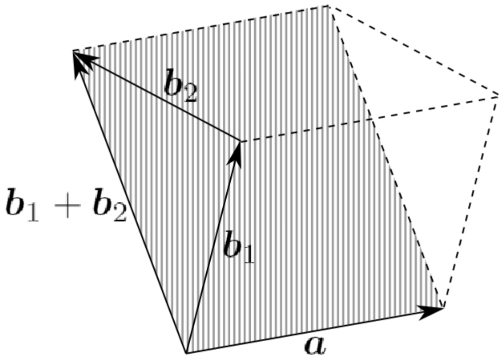


図 4

$V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ についても考えてみる．図 5 より $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ で貼られる底面を $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ に沿って動かしたときの体積が $V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ である．底面を $\boldsymbol{a}_1$ に沿って動かしたときの体積が $V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ であり，底面を $\boldsymbol{a}_2$ に沿って動かしたときの体積が $V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ である．以上より，カヴァリエリの原理より $V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ が成り立つ．

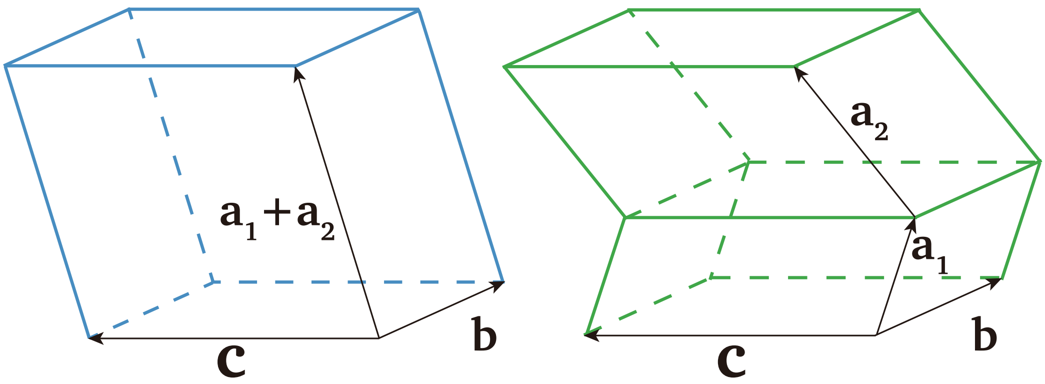


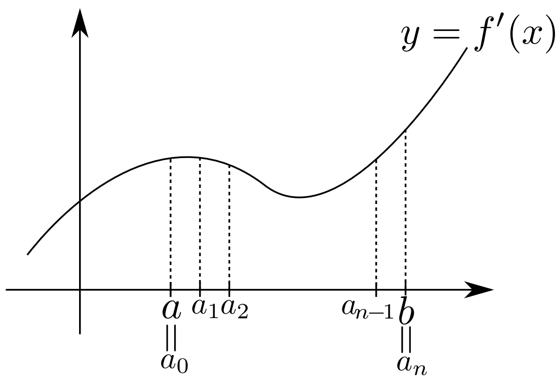
図 5

1.2　微積分学の基本定理

$f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であるとき，微積分学の基本定理は，

$$f'(x)dx \;=\; f(b) - f(a)$$

が成り立つということだった．高校の微分の定義は極限を使って定義するが，これについて考える．図のように $y = f'(x)$ の区間 $[a, b]$ を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．

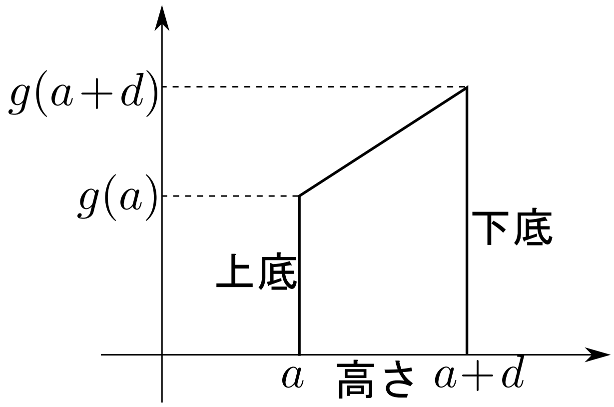


そうすると，

$$\int_a^b f'(x)dx \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)dx$$

となる．なお，$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$ となるくらい細かくする．このとき，a_i の隣の点は $a_{i+1} = a_i + d_i$ と表せる．ここで，次の積分を考える．

$$\int_a^{a+d} g(x)dx$$



Kock-Lawvere の公理より，$g(x)$ は直線になる．したがって，細分した各領域の面積を得るには台形の面積を算出すれば良いことになる．
台形の面積は {(上底) + (下底)} × (高さ)/2 なので，

$$\frac{1}{2}d(g(a)+g(a)+g'(a)d) \;=\; g(a)d$$

となる．この $g(a)d$ というのが先ほどの $f'(a)d$ にあたる．これは微積分学の基本定理である．Kock-Lawvere の公理より，任意の d に対して αd となるような実数 α が一意的に定まり，我々はこの α を $f'(a)$ と置いた．

$$\underbrace{\int_a^{a+d} f'(x)dx}_{f'(a)d} \;=\; f(a+d)-f(a) \;=\; \alpha d$$

つまり,「無限小のレベル」で微積分学の基本定理が成り立つように微分係数を定義したということである．これらを用いて実際に $f'(x)$ の区間 $[a,b]$ に対しての積分を整理すると

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(f(a_{i+1})-f(a_i)) \\
&= (f(a_1)-f(a_0))+(f(a_2)-f(a_1))+\cdots \\
&= f(a_n)-f(a_0) \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

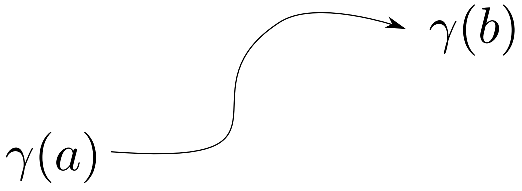
となる．

1.3 線積分

線積分とは，ベクトル場を力の場とした場合において，ある経路に沿って動いた際にどのくらい仕事をしたのか考えることである．線積分を計算する場合は，パ

ラメータは自由でかまわないがどちらが始点でどちらが終点か向きをつける必要がある．

ここで下図のような $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ という空間中の曲線に沿って動いたときにどれだけ仕事がされるかについて考える．



力 $\boldsymbol{f}$ の中で曲線 γ に沿って動いたとき，

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$$

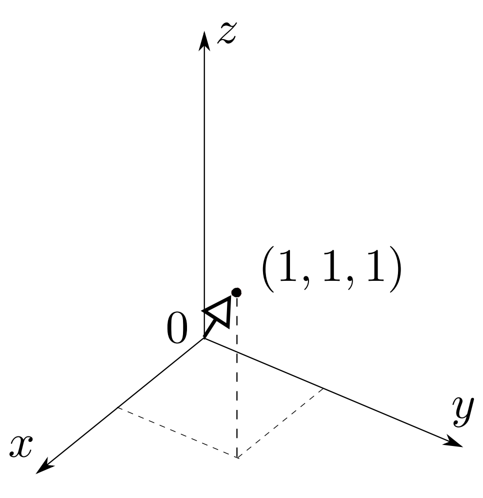
という仕事がなされる．$[a, b] \mapsto t$ とすると，

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

とおける．

例題 1：$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma} : t \in [0, 1] \mapsto (t, t, t)$ における仕事は，

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^2 + t + t^3) dt = \underline{\frac{13}{12}}$$

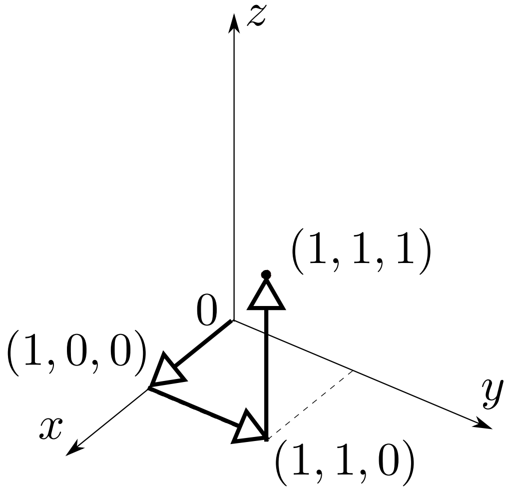


例題２：異なる経路が組み合わさった場合の線積分

$\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto (t,0,0)$, $\gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto (1,t,0)$, $\gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto (1,1,t)$ における仕事は,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + t + t) dt = \underline{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

このように，始点と終点が同じでも道のりによって仕事量・線積分の値は変わる．線微分が道によらないで始点と終点だけで決まるとき，$\boldsymbol{f}$ を保存力という．また，γ_1 逆向きの道を $-\gamma_1$ と表すと，$\int_{-\gamma} \boldsymbol{f} \cdot d\gamma = -\int_{\gamma} \boldsymbol{f} \cdot d\gamma$ が成り立つ．



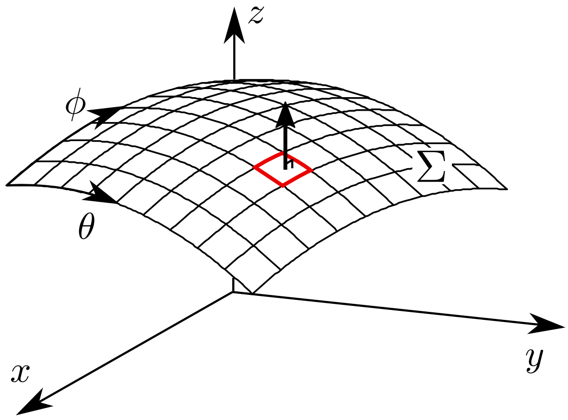
1.4　面積分

それぞれの区間 $[a_1, b_1] \in \theta$，$[a_2, b_2] \in \phi$ について，曲面 $\Sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が定義されているとする．このとき，曲面 Σ を細分して微小領域ごとに面積の大きさの法線ベクトルを考える．

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲面 Σ 上の面積分は，この法線ベクトルとベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の内積を，曲面 Σ 上のすべての微小領域にわたって加えた和で表せる．

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(\theta, \phi)\right) \cdot \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi$$

線積分はベクトル場を力の場と考えて曲線に沿って動いた時にどれくらいの仕事をするかを考えたが，面積分ではベクトル場を流れの場として，単位時間にど



れだけの流量が面を横切るかを考えている．このとき，パラメータの定義は自由だが，線積分と同様に向きをつけることが重要である．特に球面のように内と外を分ける（境界がない）曲面では外向きを表にする．表と裏を入れ替えた曲面を $-\Sigma$ で表すと，

$$\int_{-\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; -\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．

曲面の境界は曲線であるため，こちらも向きが重要となる．境界の向きは，曲面の表に旗を立ててやり，左手に旗が見えるように回るのが順方向と定義される．

実際に，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ という球面に対して計算する．ベクトル関数

$$\Sigma(\theta, \phi) \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a \sin\theta \cos\phi \\ a \sin\theta \sin\phi \\ a \cos\theta \end{pmatrix}$$

の表す曲面に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の面積分;

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算する．それぞれの偏微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \;=\; \begin{pmatrix} a \cos\theta \cos\phi \\ a \cos\theta \sin\phi \\ -a \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial \phi} \;=\; \begin{pmatrix} -a \sin\theta \sin\phi \\ a \sin\theta \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

法線ベクトルを表すベクトル積は，

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial \phi} \;=\; \begin{pmatrix} a^2 \sin^2\theta \cos\phi \\ a^2 \sin^2\theta \sin\phi \\ a^2 \cos\theta \sin\phi \end{pmatrix}$$

となるので，ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ との内積は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}\left(\Sigma(\theta,\phi)\right)\cdot\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}\right)\\
&\qquad = a^3\sin^3\theta\cos^2\phi + a^3\sin^3\theta\sin^2\phi + a^3\cos^2\theta\sin\theta\\
&\qquad = a^3(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta)\\
&\qquad = a^3\sin\theta
\end{aligned}$$

あとは，二重積分を計算すれば良い．

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3\sin\theta d\theta d\phi &= a^3\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}d\phi\\
&= 2a^3\Big[\phi\Big]_0^{2\pi} = 4\pi a^3
\end{aligned}$$