

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 28 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23310099

研究課題名(和文) 錐最適化における新たなパラダイム：二重非負値行列錐上の最適化とソフトウェアの開発

研究課題名(英文) A new paradigm in conic optimization: Optimization over the doubly nonnegative cone and software development

研究代表者

吉瀬 章子 (Yoshise, Akiko)

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：50234472

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、錐最適化問題の1つである「二重非負値行列錐上の最適化問題」に対する新規性の高いアルゴリズムを提案することを目的としている。錐最適化問題とは、線形計画問題や、半正定値計画問題を含む、幅広い凸最適化問題である。近年組合せ最適化問題に対する半正定値緩和の有効性が数多く報告され、商用ソフトウェアも開発されているが、申請者らの最近の実験で、この緩和をより厳しくした二重非負値緩和が、極めて強力であることが分かった。ただし既存のアルゴリズムでは現実的な時間内でこの緩和問題を解くことが困難であるため、新しい発想に基づくアルゴリズムを提案し、その実装と高速化に取り組んだ。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to propose new algorithms for solving a conic optimization problem, the doubly nonnegative optimization problem which is an optimization problem over the doubly nonnegative cone. Conic optimization includes a wide range of convex optimization problems, e.g., linear programs and semidefinite programs. There have been many studies that provide evidence of effectiveness of the semidefinite relaxation for combinatorial optimization problems and several commercial software packages for solving semidefinite programs have been developed. Our recent experiments showed that a tighter relaxation, the doubly nonnegative relaxation, is quite efficient for some classes of combinatorial optimization problems. However, in spite of its efficiency, it sometimes takes a quite long time to solve the doubly nonnegative programs using existing algorithms. To overcome the difficulty, we proposed an algorithm based on a new idea, implemented and improved it.

研究分野：数理最適化

キーワード：錐最適化 二重非負値行列錐 半正定値緩和問題 共正値緩和問題 内点法 組合せ最適化

1. 研究開始当初の背景

**(1) 組合せ最適化問題に対する半正定値緩和について**

数多くの 0-1 整数計画問題群の中で、特に 2 次割当問題は、巡回セールスマン問題や施設配置問題などの多くの NP 困難な問題を含み、点数 30 の問題ですら未だに最適解が得られていない非常に困難な問題として知られている。近年、半正定値緩和を用いた新たな下界値や最適解が次々に報告されており、組合せ最適化問題に対する半正定値緩和の有効性が注目されている。

**(2) 二重非負値緩和に着目する理由：半正定値緩和における変数行列の非負条件**

0-1 整数を表現するために上記で導入した対称行列  $X$  に注目すると、 $X$  が半正定値であるという条件の他に、要素が全て非負であるという条件をさらに加えられることがわかる。このように、半正定値かつ要素がすべて非負である行列は、二重非負値 (doubly nonnegative) 行列と呼ばれる。

申請者らは、従来の半正定値制約に加え、各要素に対する非負制約を加えた二重非負値緩和によって、解の精度がどの程度改良されるかについて着目した。

$n$  次行列  $X$  について「 $X$  は二重非負値」であるという条件は、「 $Y = X$ 、 $X$  は半正定値、 $Y$  の各要素は非負」という条件と等価である。さらに「 $Y$  の各要素は非負」であることは、 $Y$  の各要素を対角成分にもつ、 $n$  の 2 乗次数の対角行列  $\text{diag}(Y)$  が半正定値であることと等価である。よって二重非負値制約は行列  $X \times \text{diag}(Y)$  の半正定値制約として記述することができ、SDPA や SeDuMi などの既存の半正定値計画問題を解くソルバーを適用して緩和問題を解くことができる。

**(3) 二重非負値緩和に対する予備的実験から得られた知見：緩和の極めて高い精度**

上述の考え方を用いて、2 次割当問題のライブラリ QAPLIB 上の 12 題の問題に対する二重非負値計緩和による効果を調べるため、SDPA Online Solver を用いて予備的な計算実験を行った。使用した例題は最小化問題であるので緩和により下界値が得られるが、いずれの問題においても半正定値緩和より遥かに精度の高い、95% 以上の下界値が得られている。

**(4) 二重非負値緩和に対する予備的実験から得られた知見：半正定値制約表現の限界**

一方で半正定値制約を用いた問題の記述には限界がある。上述の実験結果では、いずれの問題でも、半正定値緩和に比べ、二重非負値緩和の計算コストが極めて高いことがわかった。これは、次行列の二重非負値制約を、 $n$  の 2 乗次数の行列の半正定値制約で表現したことに依拠している。 $n$  次行列を変数とする半正定値計画問題の 1 反復あたりの計算量は  $n$  の 6 乗のオーダーであり、 $n$  の 2 乗次数の

半正定値制約表現を用いた二重非負値緩和の場合では、 $n$  の 12 乗のオーダーに上る。半正定値制約表現を必要としない、新たなアルゴリズムを考える必要がある。

2. 研究の目的

**(1) 二重非負値行列錐上の最適化問題を解く、新しいアルゴリズムの開発**

以上の考察から、本研究では、二重非負値行列錐上の最適化問題を解くための、半正定値制約表現を用いない新しいアルゴリズムの提案と、ソフトウェアの開発を目的とする。半正定値制約表現を用いないことは、二重非負値行列制約を数値的に直接扱うことを意味する。1990 年代以降の約 20 年間、半正定値計画問題など錐最適化問題に対するアルゴリズムは、すべて主双対内点法を基に提案されてきた。主双対内点法は、錐とその双対錐が一致する、自己双対錐を対象とするアルゴリズムである。しかし二重非負値行列錐は自己双対性を保持せず、主双対内点法は適用できない。アルゴリズムの提案には、主双対内点法とは全く異なる着想が必要である。

**(2) 新しいアルゴリズムの鍵：二重非負値行列錐上の自己整合障壁関数**

二重非負値行列錐は自己双対錐ではないが、双曲錐である。双曲錐上では、アルゴリズムの開発上、強力なツールとなる自己整合障壁関数が存在することが知られている。自己整合障壁関数の有効性は、理論的に裏付けられているものの、数学的な議論の枠内に留まり、数値実験が行えるほど十分な議論は行われていない。本研究では不足している議論を補い、現実的な条件下で有効なアルゴリズムの提案とソフトウェアの開発を行う。

3. 研究の方法

本研究の研究計画・方法は大きく分けて以下の 4 つに分かれる。

**【1】二重非負値最適化問題に関する基礎理論の構築とアルゴリズムの設計：**

既存の論文や海外における研究者との議論から必要な情報を収集し、二重非負値最適化理論的な成果を導く。また研究分担者と、各専門知識に基づく議論を行うことで、アルゴリズムの独自性を高める。

**【2】二重非負値最適化問題を解くアルゴリズムの実装：**

SDPA プロジェクトなど、錐最適化問題の数値計算における世界的第一人者である連携研究者の協力のもと、アルゴリズムの実装に取り組む。

**【3】組合せ最適化問題等に対する二重非負値緩和の計算機実験：**

組合せ最適化に詳しい研究分担者の協力のもと、二重非負値緩和を用いて、未解決の組合せ最適化問題の求解を試みる。

**【4】研究成果の公開：**

国内外の会議で成果を発表する。

#### 4. 研究成果

上述の各研究計画に従い、二重非負値最適化問題に関する基礎理論の構築とアルゴリズムの設計を行うとともに、実際のアルゴリズムの実装、ならびに組合せ最適化問題等に対する緩和効果の計算機実験を行った。具体的には、以下の「5. 小野な発表論文等」に挙げる論文あるいは発表として報告した。

##### 【1】二重非負値最適化問題に関する基礎理論の構築とアルゴリズムの設計：

〔雑誌論文〕 , , , , ,

〔学会発表〕 , , , , ,

##### 【2】二重非負値最適化問題を解くアルゴリズムの実装：

〔雑誌論文〕 , , , , ,

〔学会発表〕 , , , , ,

##### 【3】組合せ最適化問題等に対する二重非負値緩和の計算機実験：

〔雑誌論文〕 , , , , ,

〔学会発表〕 , , , , ,

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 12 件)

著者：横尾知孝, 田中彰浩, 吉瀬章子  
論文標題：円パッキング問題に対する半正定値緩和の改良に関する考察  
雑誌名：統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」  
査読の有無：無  
巻：27  
発行年：2015  
最初と最後の頁：95 - 107  
掲載論文の DOI：無

著者：Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise  
論文標題：An LP Based Algorithm to Test Copositivity  
雑誌名：Pacific Journal of Optimization  
査読の有無：有  
巻：11  
発行年：2015  
最初と最後の頁：101-120  
掲載論文の DOI：無

著者：吉瀬章子  
論文標題：対称錐ではない凸錐上の最適化問題 - 錐最適化と行列の非負性に関するいくつかの話  
雑誌名：システム / 制御 / 情報  
査読の有無：有  
巻：59  
発行年：2015  
最初と最後の頁：27 - 32  
掲載論文の DOI：無

著者：田中彰浩, 吉瀬章子  
論文標題：行列の共正値性を判定する新し

#### いアルゴリズムの提案

雑誌名：統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」

査読の有無：無

巻：26

発行年：2013

最初と最後の頁：191-204

掲載論文の DOI：無

著者：松川恭明, 吉瀬章子

論文標題：非対称錐上の最適化問題に対する非許容型内点法

雑誌名：統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」

査読の有無：無

巻：26

発行年：2013

最初と最後の頁：106-121

掲載論文の DOI：無

著者：舟橋史明, 吉瀬章子

論文標題：円パッキング問題に対する半正定値緩和に関する考察

雑誌名：統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」

査読の有無：無

巻：26

発行年：2013

最初と最後の頁：60-72

掲載論文の DOI：無

著者：松川恭明, 吉瀬章子

論文標題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems

雑誌名：統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」

査読の有無：無

巻：306

発行年：2013

最初と最後の頁：32-40

掲載論文の DOI：無

著者：Satoshi Takahashi, Atsuko Takefusa, Maiko Shigeno, Hidemoto Nakada, Tomohiro Kudoh, Akiko Yoshise

論文標題：Virtual Machine Packing Algorithms for Lower Power Consumption

雑誌名：4th IEEE International Conference on Cloud Computing Technology and Science

査読の有無：有

巻：4

発行年：2012

最初と最後の頁：161-168

掲載論文の DOI：

10.1109/CloudCom.2012.6427493

著者：松川恭明, 田中彰浩, 吉瀬章子

論文標題：対称錐ではない凸錐上の最適化問題 - 完全正値行列錐と共正値行列錐に

まつわるいくつかの話題-

雑誌名: 第 24 回 RAMP シンポジウム予稿集

査読の有無: 無

巻: 24

発行年: 2012

最初と最後の頁: 69-85

掲載論文の DOI: 無

著者: 吉瀬 章子

論文標題: 高校生が挑む『●●をうまく決めて■■を最小に』

雑誌名: オペレーションズ・リサーチ

査読の有無: 無

巻: 57

発行年: 2012

最初と最後の頁: 211-217

掲載論文の DOI: 無

著者: Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise

論文標題: A Primal Barrier Function Phase I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems

雑誌名: Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics

査読の有無: 有

巻: 29

発行年: 2012

最初と最後の頁: 499 517

掲載論文の DOI: 10.1007/s13160-012-0081-1

著者: Akiko Yoshise

論文標題: Complementarity Problems over Symmetric Cones: A Survey of Recent Developments in Several Aspects

雑誌名: Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization

査読の有無: 有

巻: 無

発行年: 2011

最初と最後の頁: 339 376

掲載論文の DOI: 無

[学会発表](計 19 件)

発表者名: Akihito, Tanaka and Akiko Yoshise

発表課題: An LP-Based Algorithm to Test Copositivity

学会等名: SIAM Optimization

発表年月日: 2014 年 5 月 18 ~ 2014 年 5 月 22 日

発表場所: San Diego, U.S.A.

発表者名: 横尾知孝, 田中彰浩, 吉瀬 章子

発表課題: 円パッキング問題に対する半正定値緩和の改良に関する考察

学会等名: 研究会「最適化: モデリングとアルゴリズム」

発表年月日: 2014 年 3 月 16 日

発表場所: 統計数理研究所 (東京)

発表者名: Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise

発表課題: An LP-based Algorithm to Test Copositivity

学会等名: ICOTA 2013

発表年月日: 2013 年 12 月 15 日

発表場所: National Taiwan University of Science and Technology (台湾)

発表者名: Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise

発表課題: An LP-based Algorithm to Test Copositivity

学会等名: ICCOPT 2013

発表年月日: 2013 年 7 月 31 日

発表場所: Universidade Nova de Lisboa, Portugal

発表者名: 松川恭明, 吉瀬 章子

発表課題: 非対称錐上の最適化問題に対する非許容型主内点法

学会等名: 研究会「最適化: モデリングとアルゴリズム」

発表年月日: 2013 年 03 月 12 日

発表場所: 統計数理研究所 (東京都)

発表者名: 田中彰浩, 吉瀬 章子

発表課題: 行列の共正値性を判定する新しいアルゴリズムの提案

学会等名: 研究会「最適化: モデリングとアルゴリズム」

発表年月日: 2013 年 03 月 12 日

発表場所: 統計数理研究所 (東京)

発表者名: 舟橋史明, 吉瀬 章子

発表課題: 円パッキング問題に対する半正定値緩和に関する考察

学会等名: 研究会「最適化: モデリングとアルゴリズム」

発表年月日: 2013 年 03 月 12 日

発表場所: 統計数理研究所 (東京)

発表者名: 田中彰浩, 吉瀬 章子

発表課題: 行列の共正値性を判定する新しいアルゴリズムの提案

学会等名: 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会

発表年月日: 2013 年 03 月 05 日

発表場所: 東京大学 (東京)

発表者名: 松川恭明, 吉瀬 章子

発表課題: 非対称錐上の最適化問題に対する非許容型主内点法

学会等名: 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会

発表年月日: 2013 年 03 月 05 日

発表場所: 東京大学 (東京)

発表者名: 武林佑弥, 鶴飼孝盛, 繁野麻衣子, 吉瀬 章子

発表課題: 筑波大学附属病院における病床

割当のモデル化  
学会等名：日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会  
発表年月日：2013年03月05日  
発表場所：東京大学（東京）

発表者名：Akiko Yoshise  
発表課題：Optimization over Nonsymmetric Convex Cones Several Topics Related to the Copositive and Completely Positive Cones  
学会等名：The 5th International Conference on Optimization and Control with Applications (OCA 2012)（招待講演）  
発表年月日：2012年12月05日  
発表場所：中国石油大学（中国）

発表者名：Akiko Yoshise  
発表課題：Optimization over Nonsymmetric Convex Cones Several Topics Related to the Copositive and Completely Positive Cones  
学会等名：Workshop I on Large Scale Conic Optimization（招待講演）  
発表年月日：2012年11月22日  
発表場所：National University of Singapore（Singapore）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems  
学会等名：INFORMS Annual Meeting（オーガナイザー）  
発表年月日：2012年10月16日  
発表場所：Phoenix Convention Center（U.S.A.）

発表者名：Akiko Yoshise  
発表課題：Optimization over Nonsymmetric Convex Cones Several Topics Related to the Copositive and Completely Positive Cones  
学会等名：RAMP2012（招待講演）  
発表年月日：2012年9月27日  
発表場所：東北大学（宮城）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems  
学会等名：日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会  
発表年月日：2012年3月28日  
発表場所：防衛大学校（神奈川）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems

学会等名：Graph CREST, International Workshop（招待講演）  
発表年月日：2012年3月23日  
発表場所：中央大学（東京）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems  
学会等名：研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」  
発表年月日：2012年3月15日  
発表場所：政策研究大学院大学（東京）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：A Primal Barrier Function Phase-I Algorithm for Nonsymmetric Conic Optimization Problems  
学会等名：研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」  
発表年月日：2012年3月15日  
発表場所：政策研究大学院大学（東京）

発表者名：Yasuaki Matsukawa and Akiko Yoshise  
発表課題：Optimization over the Doubly Nonnegative Cone  
学会等名：SIAM Conference on Optimization  
発表年月日：2011年5月16日  
発表場所：Darmstadt Conference Center, Darmstadt, Germany

〔その他〕

ホームページ等

Akiko Yoshise

<http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~yoshise/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉瀬 章子 (YOSHISE, AKIKO)  
筑波大学・システム情報系・教授  
研究者番号：50234472

### (2) 研究分担者

山本 芳嗣 (YAMAMOTO, YOSHITSUGU)  
筑波大学・システム情報系・教授  
研究者番号：00119033

久野 誉人 (KUNO, TAKAHITO)  
筑波大学・システム情報系・教授  
研究者番号：00205113

繁野 麻衣子 (SHIGENO, MAIKO)

筑波大学・システム情報系・准教授  
研究者番号：40272687

八森正泰 (HACHIMORI, MASAHIRO)  
筑波大学・システム情報系・准教授  
研究者番号：00344862

(3)連携研究者

藤沢克樹 (FUJISAWA, KATSUKI)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号：40303854

山下 真 (YAMASHITA, MAKOTO)  
東京工業大学・情報理工学研究科・准教授  
研究者番号：20386824

脇 隼人 (WAKI, HAYATO)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：00567597