

## 2016年度 数理科学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
内容記述	数理科学IIIA (春学期) 数理科学IIIB (秋学期)
発行年	2016
その他のタイトル	Mathematical Science III
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2241/00140875">http://hdl.handle.net/2241/00140875</a>

# 第6回 数理科学ⅢA

Category Sets 集合の作る category paradigm

objects 集合  
morphisms (arrows) 関数

定義域 dom  
値域 codomain

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

$$f \circ id_A = f$$
$$id_B \circ f = f$$

$$Cod(g \circ f) = cod(g)$$

$$dom(g \circ f) = dom(f)$$

objects 貧弱 唯1個



monoids (結合律  
単位元  
逆元は要求しない)

morphisms 貧弱

2個の objects AからBへの  
morphisms は高々1個

例,  $(\mathbb{N}, +)$

$\{0, 1, 2, \dots\}$

掛け算  $\{1, 2, 3, \dots\}$

$$x \leq x$$

~~$$x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$$~~

$$x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

preorder  
擬順序

集合論 すべては集合である.  $A \rightarrow B$

一元論

関数も集合

$(a, b)$

Category (関数) 重きを与える

二元論

集合

対等

直積 とういうつくり方をするか

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

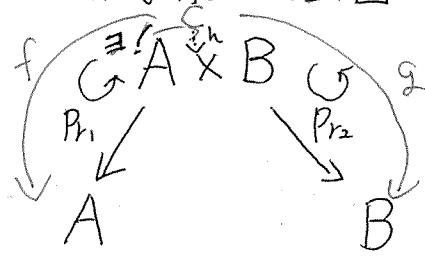
$$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$$

$$f = p_{r1} \circ h$$

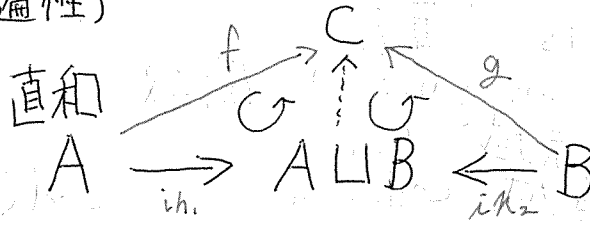
$$g = p_{r2} \circ h$$

universal (普遍性)

Categoryの場合  
機能に注目



可換



直和

Coproduct

category  $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}^{op}$

opposite category

dual category

Category 圏論

2つの categories

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  functor (関手)

$A \in \mathcal{C}$  の object  $\rightarrow F(A) \in \mathcal{D}$  の object

$f \in \mathcal{C}$  の morphism  $\rightarrow F(f) \in \mathcal{D}$  の morphism

$$f: A \rightarrow B \quad F(f): F(A) \rightarrow F(B)$$

$$\bullet \text{ dom}(F(f)) = F(\text{dom}(f))$$

$$\bullet \text{ cod}(F(f)) = F(\text{cod}(f))$$

$$A \mapsto F(A)$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$\bullet F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

例 群 group

Grp 群とその間の  
単同型の作る  
category

$(G, \frac{0}{\neq}, e)$   
2項演算 忘れる。

forgetful  
functor  
(忘却関手)

集合 集合論

群論 (group theory)  
集合論

集合  $\rightarrow$  群

集合Aで生成される自由群

$a, b \in A$   
 $a$   
 $a^{-1}$

$ab^{-1}cd^{-1}e$  列 concatenation associative

$a(b^{-1})e$

$(ab^{-1}c)^{-1} = c^{-1}ba^{-1}$

群  $A \rightarrow A$ で生成される自由群

$f \downarrow$   
 $B$

$ab^{-1}c$

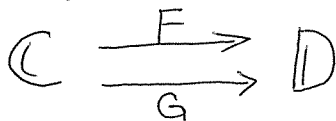
$f(a)f(b)^{-1}f(c)$   
 集合Bで生成される自由群

集合  $A$   
 $f \downarrow$   
 $B$

Aを基底とする線形空間

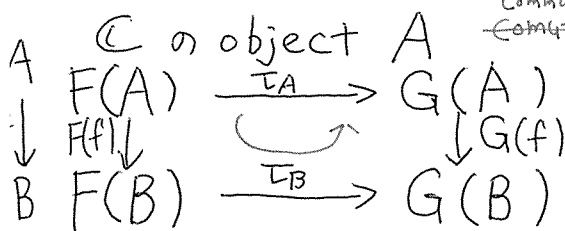
$d_1a + d_2b + \dots$

Natural transformation (自然変換)



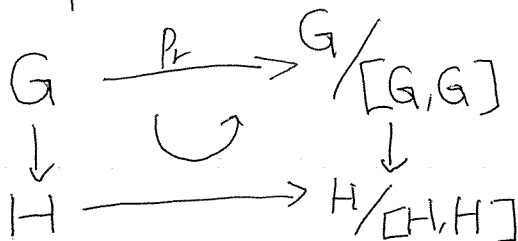
F, G, Category Cから Category Dへの functors

Commutative square:  $F(A)$ から  $G(A)$ への morphism



$G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f)$

(例) 群 Grp  $\rightarrow$  Grp  
 $G \rightarrow G$



$[G,G] \quad xy = yx$   
 $(x^{-1}y^{-1}xy) = e$