2016年度 数理科学III

No.
Date 11/22(火)

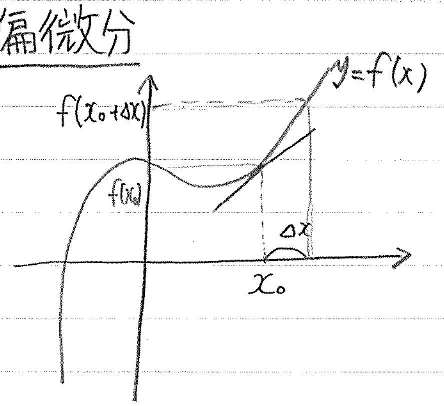
第8回 数理科学ⅢB

多変数の微分

線形代数
微積分（多変数）$\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$z=f(x,y)$

偏微分

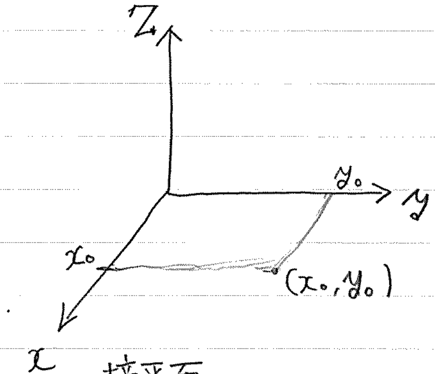


曲がっているのはイヤ

$\Rightarrow$ 直っすぐなものでおきかえよう。

線形代数

合成



接平面

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ 　平面

$$\Delta z = \underline{(a, b)}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}$$

$\Delta x \mapsto \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

複雑

接線では比例関係

比例定数

$\Delta y = a\,\Delta x$

$f'(x)$

比例というのは

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 　1次元の線形代数

$f'(x_0)$ = 線形写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

微分係数

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 　　$z=f(x,y)$ 　　$f'(x,y)$. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$への線形写像

1×2の行列

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 　　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$への線型写像

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$への線形写像

$m \times n$の行列

$\underline{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$ 　　$\underline{g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

$g \circ f$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$への線型写像

No.
Date

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f'(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$への線型写像

$(g \circ f)' = \underbrace{g'(f(x))}_{b} \circ \underbrace{f'(x)}_{a}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$

$d \in D \to f(x + ad)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $f(x + ad) - f(x) = b\, d$

$f'(x)(a) = b$

$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}} \longmapsto \underbrace{x + at}_{\mathbb{R}^m}$

合成

$y \in \mathbb{R}^m \longmapsto f(y) \in \mathbb{R}^m$ $t \longmapsto f(x + at)$

$f'(x) \circ \bigcirc$ a

$f'(x)(a)$

$\mathbb{R}$ - module E Euclidean

$\mathbb{R}$

E^X

$\mathbb{R}^n$

V: $\mathbb{R}$ - module
E: Euclidean $\mathbb{R}$ - module

$f: V \to E$ homogeneous $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in V$

Lemma $f: V \to E$: homogeneous

$f'(x)$ は independent of x $f'(x) = f'(0)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

xの代わりに αx
dの代りに αd
f: homogeneous

(証明) $f(x + da) = f(x) + d f'(x)(a)$

$f(\alpha x + \alpha d a) - f(\alpha x) = \alpha d\, f'(\alpha x)(a)$

$\varphi: D \to \mathbb{R}$ Euclidean
$\exists ! a \in \mathbb{R}$ $\varphi(d) = \varphi(0) + ad$

$\alpha\{f(x + da) - f(x)\}$

$'' f'(x)(a) d$ $d \in D$

$da = db \Rightarrow a = b$
$\forall d \in D$

$\therefore \alpha d f'(\alpha x)(a) = \alpha d f'(x)(a)$

$\alpha f'(\alpha x)(a) = \alpha f'(x)(a)$

No.
Date

$\alpha f'(\alpha x)(a) = \alpha f'(x)(a)$

これをαで微分

$f'(\alpha x)(a) + \underline{\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f'(\alpha x)(a)\right)} = f'(x)(a)$

$\alpha = 0$

$f'(0)(a) = f'(x)(a)$

微分はどこでやろうと同じである。

$f : V \to E$

$x = a$

命題 f : homo $\Rightarrow f = f'(0)$

f : linear

$f(x + \alpha a) = f(x) + \alpha f'(x)(a)$

証明 $\alpha f'(x)(x) = f(x + \alpha x) - f(x)$

$= (1+\alpha) f(x) - f(x) = \alpha f(x)(a)$

maruman