



2016年度 微積分演習

| | |
|------|---|
| 著者 | 西村 泰一 |
| 著者別名 | Nishimura Hirokazu |
| 発行年 | 2016 |
| URL | http://hdl.handle.net/2241/00139486 |

微積分演習第9回

連立線型微分方程式

鶴亀算

$$\begin{cases} \tilde{x} + \tilde{y} = \text{〇} \\ 2\tilde{x} + 4\tilde{y} = \text{〇} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{頭} \\ \text{足} \end{matrix}$$

放射性元素

$$x' = ax$$

$$\text{解くと } x = x(t) = Ce^{at}$$

$$x(0) = C \quad (\text{初期条件})$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ 行列}$$

$$\text{連立} \quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

指数関数

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad \text{無限次の多項式}$$

$$\text{複素数 } e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots$$

$$\text{指数法則 } e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

2x2 行列全体. 足(算), 掛け算. 定義より $e^0 = 1$

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

方程式は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ と解ける

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = x(0) \\ C_2 = y(0) \end{array} \right\} \text{初期条件}$$

e^{tA} の計算

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 対角型 のときは

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

(たか^ら、 $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \dots$

$$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$$

対角化

$A = PBP^{-1}$ のとき $\left(\begin{array}{l} P: \text{正則行列} \\ PP^{-1} = P^{-1}P = E \end{array} \right)$

対角型 B のとき

$$\begin{aligned} A^2 &= (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \\ &= PB \underbrace{P^{-1}P}_{E} BP^{-1} \\ &= PB^2P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \\ &= PB^3P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

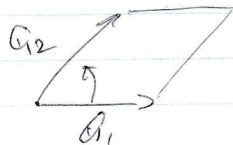
$$\begin{aligned}
 e^A &= e^{PBP^{-1}} \\
 &= E + PBP^{-1} + \frac{1}{2!} (PBP^{-1})^2 + \frac{1}{3!} (PBP^{-1})^3 + \dots \\
 &= P \left(E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots \right) P^{-1} \\
 &= e^B
 \end{aligned}$$

行列式 (determinant)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

a_1, a_2 の張る平行四辺形の
符号のついた面積を $S(a_1, a_2)$ とする.



a_1 から a_2 反時計回り +
時計回り -

$$S(a_1, a_2) = -S(a_2, a_1) \text{ が成り立つ}$$

$$a_1 = a_2 \text{ とすれば}$$

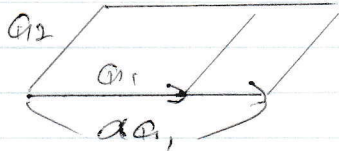
$$S(a_1, a_1) = -S(a_1, a_1)$$

$$2S(a_1, a_1) = 0$$

$$S(a_1, a_1) = 0$$

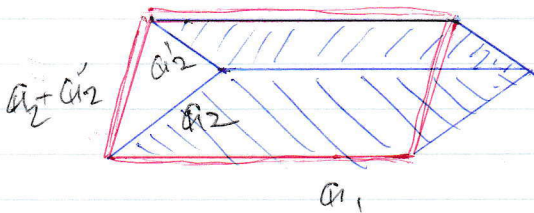
————— 平行四辺形の面積 0

$$S(\alpha a_1, a_2) = \alpha S(a_1, a_2) \text{ が成り立つ}$$



$$\underline{S(a_1, a_2 + a_2')} = \underline{S(a_1, a_2)} + \underline{S(a_1, a_2')}$$

成り立つ



宿題

$$a_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \quad a_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \text{ とする.}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S(a_1, a_2) = S(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2)$$

$$= \dots$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

と計算することを示せ.