



2016年度 微積分演習

| | |
|------|---|
| 著者 | 西村 泰一 |
| 著者別名 | Nishimura Hirokazu |
| 発行年 | 2016 |
| URL | http://hdl.handle.net/2241/00139486 |

微積分演習第14回

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ の行列}$$

解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
計算

固有値

$$|tE - A| = 0$$

2次方程式

(1) 異なる2実解 α, β をとく

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P} \\ &= P^{-1} e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} &= E + t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{6} t^3 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t\alpha + \frac{1}{2} t^2 \alpha^2 + \frac{1}{6} t^3 \alpha^3 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + t\beta + \frac{1}{2} t^2 \beta^2 + \frac{1}{6} t^3 \beta^3 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 複素解をとく

$$t = a \pm bi \quad (a, b: \text{実数}, b \neq 0)$$

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P$$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列 \longleftrightarrow $a+bi$ 複素数の世界 対応

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= e^{tP^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P} \\
 &= P^{-1} e^{t \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} P \\
 &= P^{-1} \left\{ E + t \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{6} t^3 \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^3 + \dots \right\} P
 \end{aligned}$$

複素数のように
計算する。

$$\begin{aligned}
 e^{t(a+bi)} &= e^{ta+tb i} \\
 &= e^{ta} \cdot e^{tb i} \quad (\text{指数法則}) \\
 &= e^{ta} (\cos tb + i \sin tb) \\
 &\quad \downarrow \\
 &= e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(3) 重解 α をとるとき

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P \text{ と書ける。}$$

$$\begin{aligned}
 A &= P^{-1} (\alpha E) P = \alpha P^{-1} E P \\
 &= \alpha P^{-1} P \\
 &= \alpha E \quad \text{元から } A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ほかのとき

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P$$

$$\begin{aligned}
 e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}} \\
 = e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}} e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

$$t \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commute
交換可能

$$e^{A+B} = e^A e^B \text{ と成り立つ。}$$

$$\begin{aligned}
 e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} &= E + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{6} t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & t e^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$e^{tA} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & t e^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} P$$

解は

$$\begin{cases} x = C_{11} e^{t\alpha} + C_{12} t e^{t\alpha} \\ y = C_{21} e^{t\alpha} + C_{22} t e^{t\alpha} \end{cases} \text{ の形。}$$

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$
はよくわからない
定数

$$\begin{aligned}
 x' &= \alpha C_{11} e^{t\alpha} + C_{12} e^{t\alpha} + \alpha C_{12} t e^{t\alpha} = \bigcirc \\
 y' &= \alpha C_{21} e^{t\alpha} + C_{22} e^{t\alpha} + \alpha C_{22} t e^{t\alpha} = \bigcirc
 \end{aligned}$$

元の方程式を
みたすことから

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad b_1 e^{t\alpha} + b_2 t e^{t\alpha} = 0 \implies b_1 = b_2 = 0$$

をもちいて前と同様に解ける。

report

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

微分方程式を解け