



2016年度 微積分演習

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2016
URL	http://hdl.handle.net/2241/00139486

微積分演習 第13回

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

Aの固有値

異なる2実解 α, β

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P$$

$$e^{tA} = e^{tP^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P}$$

$$= e^{P^{-1} t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P}$$

$$= P^{-1} e^{t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ は定数} \\ \text{初期条件} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = c_{11}e^{t\alpha} + c_{12}e^{t\beta} \\ y = c_{21}e^{t\alpha} + c_{22}e^{t\beta} \end{cases}$$

元の微分方程式をみたすこと、初期条件を考慮して解ける。

$$\forall t \in \mathbb{R}, c_1 e^{t\alpha} + c_2 e^{t\beta} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

固有方程式

複素解 $a \pm bi$ ($b \neq 0$) をとくと

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対称}} a_1 + b_1 i$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対称}} a_2 + b_2 i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対称}} (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対称}} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$

$$\begin{aligned} e^{t \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} &\xleftrightarrow{\text{対称}} e^{t(a+bi)} \\ &= e^{ta+tb i} \\ &= e^{ta} e^{tb i} \\ &= e^{ta} (\cos tb + i \sin tb) \\ &= e^{ta} \cos tb + i e^{ta} \sin tb \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} e^{ta} \cos bt & -e^{ta} \sin bt \\ e^{ta} \sin bt & e^{ta} \cos bt \end{pmatrix}$$

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P$$

$$\text{解は } P^{-1} \begin{pmatrix} e^{ta} \cos bt & -e^{ta} \sin bt \\ e^{ta} \sin bt & e^{ta} \cos bt \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{未定数}$$

$$\begin{aligned} x &= c_{11} e^{ta} \cos bt + c_{12} e^{tb} \sin bt \\ y &= c_{21} e^{ta} \cos bt + c_{22} e^{tb} \sin bt \quad \text{の形} \end{aligned}$$

微分して、前と同じ要領

$$\begin{aligned} (\forall t \in \mathbb{R}) \quad c_1 e^{ta} \cos bt + c_2 e^{tb} \sin bt &= 0 \\ \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 &\quad \text{を利用} \end{aligned}$$

例) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-2) + 2$$

$$= t^2 - 2t + 2 = 0$$

$$t = 1 \pm i$$

$$\begin{cases} x = c_{11} e^t \cos bt + c_{12} e^t \sin bt \\ y = c_{21} e^t \cos bt + c_{22} e^t \sin bt \end{cases}$$

$$x' = c_{11}(e^t \cos bt - e^t \sin bt) + c_{12}(e^t \sin bt + e^t \cos bt)$$

$$y' = c_{21}(e^t \cos bt - e^t \sin bt) + c_{22}(e^t \sin bt + e^t \cos bt)$$

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} = -2c_{21} \\ -c_{11} + c_{12} = -2c_{22} \\ c_{21} + c_{22} = c_{11} + 2c_{21} \\ -c_{21} + c_{22} = c_{12} + 2c_{22} \end{cases}$$

文字は2つ消える。初期条件を考慮

例) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -b^2 x \quad (b > 0) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix}$

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ b^2 & t \end{vmatrix} = t^2 + b^2 = 0$$

$$t = \pm bi$$

$$\begin{cases} x = c_{11} \cos bt + c_{12} \sin bt \\ y = c_{21} \cos bt + c_{22} \sin bt \end{cases}$$

$$x = c_{11} \cos bt + c_{12} \sin bt$$

$$y = b c_{12} \cos bt - b c_{11} \sin bt$$

$$x'' = -b^2 x$$

2階
方程式

→

$x' = y$
とおく

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b^2 x \end{cases}$$

1階
連立方程式

単振動