2016年度 微積分演習

No. 1

Date '16. 6. 23

微積分演習 第10回

行列式

2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

左辺、右辺の行列式を計算する。

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \times (b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{12}a_{21}b_{21} - a_{12}b_{11}a_{21}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}$$

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{22})$$

$$= (\cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}})$$

$$- (\cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + \cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}})$$

一致

$$|AB| = |A|\,|B|$$

数学的思考力を試す問題

$$\begin{cases} (A+B)+C = A+(B+C) \\ A+B = B+A \end{cases}$$

が成り立つとする。

$A_1+A_2+A_3 = A_1+(A_2+A_3)$ とする。

$A_1, \cdots, A_n$ を並びかえたものを $B_1, \cdots, B_n$ とする。

$A_1+\cdots+A_n = B_1+\cdots+B_n$ を上の2つの式のみを使って証明せよ。

たとえば

$A_1+A_2+A_3=A_1+A_3+A_2$ を証明する

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= A_1+(A_2+A_3)\\ &= A_1+(A_3+A_2)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

たとえば

$A_1+A_2+A_3=A_3+A_1+A_2$ を証明する

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= A_3+(A_1+A_2)\\ &= (A_3+A_1)+A_2\\ &= (A_1+A_3)+A_2\\ &= A_1+(A_3+A_2)\\ &= A_1+(A_2+A_3)=(\text{左辺})\end{aligned}$$

題意を理解し、このように感覚をつかんでから証明をする。

$|A|$: 行列式（数である）

$|AB|=|A|\,|B|$ が成り立つ

$P^{-1}AP=B$ のとき、　$(P^{-1}P=PP^{-1}=E)$

$$\begin{aligned}|P^{-1}AP| &= |B|\\ |P^{-1}|\,|A|\,|P| &= |B|\\ |P^{-1}|\,|P|\,|A| &= |B|\\ |P^{-1}P|\,|A| &= |B|\\ |E|\,|A| &= |B|\\ |A| &= |B|\end{aligned}$$

（注意 $\cancel{AB=BA}$）

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}$ 対角型 ならば $|B|=b_{11}b_{22}$

・固有値

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$|tE-A|=0$ をAの固有方程式という。
解を固有値という。

$$= \left| \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t-a_{22} \end{vmatrix}$$

tに関する2次方程式

$$= (t-a_{11})(t-a_{22})-a_{12}a_{21}$$
$$= t^2-(a_{11}+a_{22})t+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

特に、A：対角型ならば
解は $t=a_{11}, a_{22}$（対角成分）

B：対角化可能であるとする。

$$P^{-1}\underline{A}P=B$$

対角型

$$\begin{aligned}
|tE-B| &= |tE-P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}tEP-P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(tE-A)P| \\
&= |P^{-1}||tE-A||P| \\
&= |P^{-1}||P||tE-A| \\
&= |E||tE-A|
\end{aligned}$$

定理

A：与えられたとする。
$|tE-A|=0$ が異なる2実解をもつとき、
必ず対角化可能