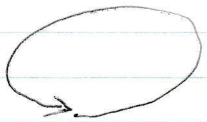
2016年度 微積分

微積分 第25回

複素関数論

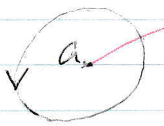
f: 正則



特異点のない閉路 $\int_\gamma f\,dz = 0$

特異点がある場合

たとえば aを中心 半径R } 円γ



Laurent 級数（前回）

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i(z-a)^i$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i\int_\gamma (z-a)^i dz$$

$$=\alpha_{-1}\int_\gamma (z-a)^{-1}dz$$

$$=2\pi i\,\underbrace{\alpha_{-1}}_{\text{留数}}$$

$i\neq -1$ のときは

$$(z-a)^i=\left(\frac{1}{i+1}(z-a)^{i+1}\right)'$$

原始関数

$g'=f$

$\gamma:[c_1,c_2]\to\mathbb{C}$ とすると $\gamma(c_1)\xrightarrow{\gamma}\gamma(c_2)$

閉路なら $\gamma(c_1)=\gamma(c_2)$

$$\int_\gamma f(z)dz=g(\gamma(c_2))-g(\gamma(c_1))$$

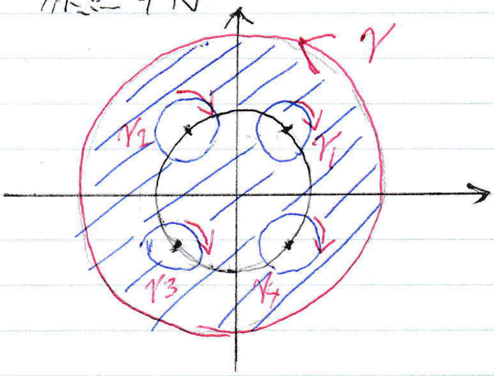
$$=0$$

Date

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$$

γ : 半径 2
原点中心

$z^4+1=0$ の解を
$\theta_1, \cdots, \theta_4$ とする。



$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+1}$$

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

連合軍

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \cdots - \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)dz}_{} + \cdots + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+1}=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i(z-\theta_1)^i$$

$$z^4+1=(z-\theta_1)(z-\theta_2)(z-\theta_3)(z-\theta_4)$$ 因数分解

すると、$f(z)=\dfrac{1}{z-\theta_1}\dfrac{z^2}{(z-\theta_2)(z-\theta_3)(z-\theta_4)}$

$g(z)$

θ_1 のまわりで正則

$$g(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i(z-\theta_1)^i$$

よって $f(z) = \dfrac{1}{z-\theta_1} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z-\theta_1)^i$

$$= \frac{\beta_0}{z-\theta_1} + \beta_1 + \beta_2 (z-\theta_1) + \beta_3 (z-\theta_1)^2 + \cdots$$

$\beta_0 = g(\theta_1)$ である.

（$z=\theta_1$ における留数）

$z=\theta_2$ における留数も同様に

$$f(z) = \frac{1}{z-\theta_2} \underbrace{\frac{z^2}{(z-\theta_1)(z-\theta_3)(z-\theta_4)}}_{=h(z)}$$

として求める.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\underbrace{\bigcirc}_{z=\theta_1\text{ における留数}} + \underbrace{\bigcirc}_{\theta_2\text{ での留数}} + \underbrace{\bigcirc}_{\theta_3\text{ での留数}} + \underbrace{\bigcirc}_{\theta_4\text{ での留数}} \right)$$

レポート

実際に $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$ を計算せよ.