



2016年度 微積分

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2016
URL	http://hdl.handle.net/2241/00139484

微積分 第22回

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy$$

$$dz = dx + i dy$$

$$\left(\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ を微分可能と} \\ f' dx \quad \text{1次の微分係数} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \bigcirc dz \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann の方程式

1-3-1-2

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f = f_1 + f_2 i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$d(f dz) = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dz$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge (dx + i dy) + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge (dx + i dy)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} i dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx$$

$$= \left(i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$f = f_1 + i f_2$$

$$= i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)$$

$$= - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)$$

実部 虚部

Cauchy-Riemann の方程式をみたるとき
 $d(f dz) = 0$ とする。

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$df = g dz \text{ と書ける}$$



Cauchy-Riemann の
 方程式を満たす
 (前回)

$$d(f dz) = 0$$



Cauchy-Riemann の
 方程式を満たす
 (今回)

- Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ関数を
 正則関数, 解析関数 といい, 対象になる。

$f(z) = c$ (定数関数) は正則

$f(z) = z$ (恒等関数) は正則

$$z = x + iy$$

$$f_1(z) = x$$

$$f_2(z) = y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$df = 1 dz$$

f, g : 正則 $\Rightarrow f+g$: 正則

$$d(f+g) = df + dg = f' dz + g' dz = (f' + g') dz$$

α : 複素数

$$d(\alpha f) = \alpha df = \alpha f' dz$$

$$\begin{aligned} d(fg) &= (df)g + f(dg) \\ &= f'g dz + f g' dz \\ &= \underline{(f'g + fg')} dz \end{aligned}$$

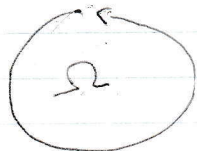
多項式の関数は正則

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0$$

sin, cos も正則 (無限次の多項式)

$$f: \text{正則} \Rightarrow df = f' dz$$

$$f: \text{正則} \Rightarrow f' \text{ も正則}$$

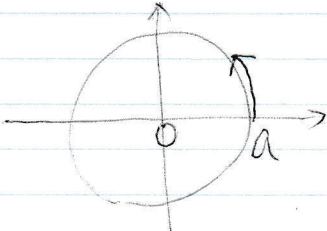
積分定理 (2次元 z も考えられる)閉曲線 γ  w 1次の微分形式

$$\int_{\gamma} w = \int_{\Omega} dw$$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\Omega} \underline{d(f dz)}$$

 $f: \text{正則} \Rightarrow 0$ $f: \text{正則}$ \Rightarrow 閉曲線に沿った
線積分は0

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$



原点中心
半径 a の円

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto a(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} a(\cos\theta + i\sin\theta)' d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - i\sin\theta) (-\sin\theta + i\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i d\theta$$

$$= [i\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi i$$