

曲げ試験による PVA-ECC の引張性能評価

EVALUATION OF TENSILE PROPERTIES OF PVA-ECC USING BENDING TEST

清水克将*, 金久保利之**, 閑田徹志***, 永井 覚****
Katsuyuki SHIMIZU, Toshiyuki KANAKUBO, Tetsushi KANDA
and Satoru NAGAI

Abstract- ECC (Engineered Cementitious Composites), which is grouped in one of the fiber reinforced cementitious composites, shows pseudostrain hardening behavior with several percent tensile strain and multiple cracks. Evaluation method for tensile properties (tensile strength and ultimate strain) of ECC is proposed by using bending test results. In this research, uniaxial tension test and bending test of PVA-ECC (ECC with Polyvinyl alcohol fiber) is conducted to obtain correlation between tensile properties obtained by both tests. From test results, comparison value for tensile strength and ultimate strain is 0.80 and 0.87, respectively. It is considered that bending test has possibility to be performed as tensile quality control method multiplying a reduction factor of 0.7.

Keywords : PVA-ECC, Tensile property, Uniaxial tension test, Bending test, Quality control
PVA-ECC, 引張性能, 一軸引張試験, 曲げ試験, 品質管理

1. はじめに

一軸引張応力下において, 初期ひび割れ発生以降に微細なひび割れを分散発生 (マルチプルクラック) させながら, 数%程度の歪まで引張応力が上昇 (擬似歪硬化性状) する高靱性セメント複合材料 (Engineered Cementitious Composite, 以下 ECC¹⁾) がある。この材料は, モルタルの練混ぜ最中に高性能ポリマー短繊維を混入させることで製造され, 繊維とマトリクスとの付着力により, ひび割れ面において繊維が応力を伝達し (繊維の架橋効果), 高い引張靱性を発揮するものである。このような特長を生かし, 部材の最大耐力の向上や大変形時における損傷の低減, ひび割れ分散性による耐久性の向上など, 土木・建築構造物へ利用するための研究開発が近年活発に行われており, 橋梁の床版やダムの補修など実施工も報告されている²⁾。建築分野でも, 高層建築物の制震ダンパなど, 大変形を受ける耐震要素に適用することが検討されており³⁾, 材料特性を生かした ECC の構造部材への利用拡大が今後期待される。

ECC を構造部材に適用して有効利用するためには, その特長である引張性能を適切に評価し設計に反映させることが重要な課題となっている。既存の RC 構造部材の設計において, 圧縮強度がコンクリートの材料性能を表現するほとんど唯一の設計要因であったのに対し, セメント系材料である ECC の引張材料性能を構造設計に陽な

形で取り込むことは, RC 構造の可能性を広げる革新的な試みといえる。この試みの基礎となるのが上記の引張性能の評価方法の確立である。

これまでに ECC の引張性能を評価する方法が数々検討されており, その中でも一軸引張試験は直接引張性能を得ることができるため有用である。しかし, 一軸引張試験は特殊な型枠や治具が必要であるなど実施が困難なものが多い。例えば薄板状のダンベル型試験体⁴⁾では, 試験機チャックにより加力装置に直接固定でき比較的容易に載荷を行なうことできるが, 載荷軸と試験体の中心軸を一致させることは難しく, また薄板形状のために繊維が2次元配向となり, 引張性能を過大評価する傾向がある。⁵⁾ また, 著者らが一軸引張試験用に提案した角柱くびれ型試験体⁶⁾では, 試験断面が 60×100mm と大きいため繊維配向の影響を除いたものであり, 部材中での ECC の引張性能をある程度再現できると考えられるが, 特殊な型枠の使用や試験体のセッティングに多くの時間を要する等のデメリットがある。このように, 現状では一軸引張試験は多くの時間と労力を要するため, ECC 部材の製造や施工に伴う品質管理のように日常的に試験を行なう必要があるものに対しては不向きである。また, ECC が広く一般に使用されることを目指す場合, 専用の器具 (型枠や加力治具等) が必要であることが障害となると考えられる。

* 筑波大学大学院システム情報工学研究科 博士課程・工修
** 筑波大学大学院システム情報工学研究科 助教授・博士(工学)
*** 鹿島建設株式会社技術研究所建築生産グループ 上席研究員・Ph.D.
**** 鹿島建設株式会社技術研究所建築構造グループ 主任研究員・工修

Graduate Student, Doctoral Course, University of Tsukuba, M. Eng.
Assoc. Prof., GSSIE, University of Tsukuba, Dr. Eng.

Chief Research Engineer, Kajima Technical Research Institute, Ph.D.

Senior Research Engineer, Kajima Technical Research Institute, M. Eng.

そこで著者らは、擬似歪硬化性状を示す代表的な材料である PVA 繊維 (Polyvinyl alcohol fiber) を混入させた ECC (以下、PVA-ECC) を対象として、曲げ試験による引張性能の評価を検討している。⁹⁾ 曲げ試験はコンクリートの一般的な試験方法であるため、加力の容易さ、型枠および加力治具の存在等のメリットがあり、一軸引張試験に比べ試験実施に掛かる労力を大幅に削減できる。しかし、曲げ試験による引張性能評価に関するバックデータが少なく、また、一軸引張試験との相関の検討についての報告も僅少であるのが現状である。

本研究では、PVA-ECC を用いて一軸引張試験および曲げ試験を行い、引張性能評価に関するデータを蓄積して両者の相関を探り、曲げ試験による引張性能評価法を提案することを目的とする。特に、曲げ試験による評価の有用性を考え、材料の精細な挙動や材料開発にともなう確認実験等における評価ではなく、実施工において日常的に行われる品質管理試験への適用を目指した評価を行う。そのために、簡易な表現モデル、少ない評価因子、明瞭な評価方法を用いる。一軸引張試験結果と曲げ試験結果の相関を明確化し、また、ECC の引張性能から ECC を用いた部材の構造性能を評価することができるようになれば、コンクリートの 100φ×200mm 円柱供試体の圧縮強度から種々の性能を評価できる現在のコンクリート構造物の設計形態のように、ECC を用いた構造の評価を曲げ試験により行うことができるようになると思われる。

2. 実験概要

2.1 使用材料

使用した PVA 繊維の形状および力学性能は、長さ 12mm、径 0.04mm、引張強度 1690MPa、弾性係数 40600MPa である。使用材料の一覧および調合計画を表 1、表 2 に示す。使用した結合材は普通ポルトランドセメントおよびフライアッシュ (JIS A 6201 に規定する II 種) である。細骨材としては、比表面積が 2500cm²/g の石灰石砕砂を用いた。PVA 繊維の体積混入率 V_f は、2.0% (PVA20) および 1.5% (PVA15) とした。PVA15 は、PVA20 の調合を基に繊維量のみを減じて計画した。試験体は後述する形状の一軸引張試験体および曲げ試験体をそれぞれ 3~6 体ずつ製作した。試験体の打設は、均一かつ連続的に打ちこみ、打ち継ぎによる繊維の不連続性を排除するよう行った。ECC の練混ぜ方法およびフレッシュ性状については、文献 7) を参照されたい。養生方法は、練り上がり後に蒸気養生 (最高温度 35℃、8 時間) を施し、その後 20℃ で封緘養生を行った。試験方法および材料名称毎に試験時材齢が異なるため、圧縮試験時材齢および圧縮強度を、表 1 中にあわせて示した。なお、圧縮試験、一軸引張試験および曲げ試験では、試験機のセッティング等により試験時期が異なるが、数日程度であるため同時期に試験を行ったものとして扱った。

2.2 一軸引張および曲げ試験方法

一軸引張試験には、試験断面の短辺が繊維長の 5 倍程度で繊維を 3 次元配向させることができ、部材中での ECC の引張挙動を良好に表現できる角柱くびれ型試験体⁹⁾を用いた。図 1 に一軸引張試験方法を示す。この試験体は JIS A 1106 に規定されている 100×100×400mm の角柱試験体作成用鋼製型枠の内側にアルミ製の型枠を固

表 1 使用材料

名称	調合 (表 2)	体積繊維混入率 V_f (%)	圧縮強度 (MPa)	割線剛性 (GPa)	試験時材齢 (日)
PVA20-1	Mix 1	2.0	37.0	16.4	40
PVA20-2	Mix 1		38.7	17.4	40
PVA20-3	Mix 1		31.5	14.6	30
PVA20-4	Mix 1		31.3	13.7	61
PVA20-5	Mix 1		31.3	13.7	61
PVA20-6	Mix 2		39.1	19.5	46
PVA20-7	Mix 3		45.8	19.5	60
PVA20-8	Mix 1		30.4	14.4	28
PVA20-9	Mix 1		32.0	15.2	28
PVA20-10	Mix 1		24.0	12.3	28
PVA20-11	Mix 1	24.6	12.6	28	
PVA15-1	Mix 2	1.5	35.7	16.3	45
PVA15-2	Mix 3		50.3	19.4	60

表 2 調合計画

名称	配合	水結合材比*	砂結合材比*	体積繊維混入率 (%)	空気量 (%)
PVA20	Mix 1	0.46	0.65	2.0	10
	Mix 2	0.43	0.74	2.0	10
	Mix 3	0.42	0.77	2.0	10

* 結合材重量のうち、セメント:フライアッシュ JIS2 種 = 0.7:0.3

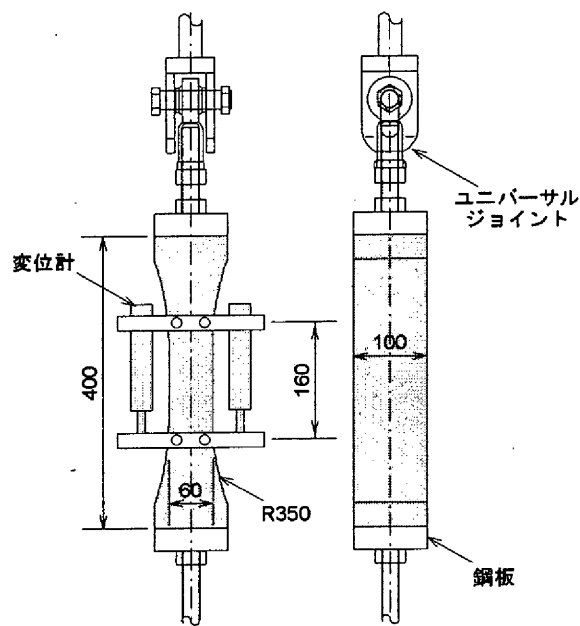


図 1 一軸引張試験方法

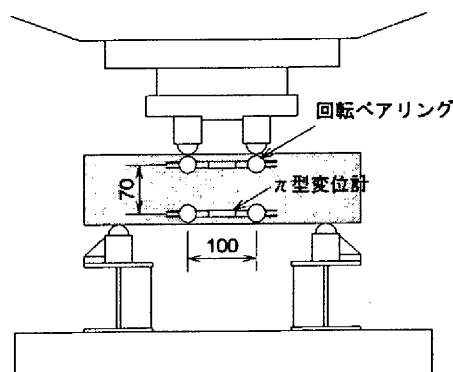


図 2 曲げ試験方法

定し、そこに PVA-ECC を打設して製作した。M24 ナットを溶接固定した鋼板をエポキシ樹脂系接着剤で試験体上下面に接着させ、端部支持条件が初期不正や 2 次曲げの影響を考慮したピン-固定⁸⁾となるように、ロッドエンドおよび M24 ネジ棒を介して試験機のヘッドチャックに固定し、静的に載荷した。変形は検長 160mm の 2 つの変位計により計測した。

曲げ試験は、JIS A 1106 に規定されるコンクリートの曲げ強度試験方法に準じて行った。ただし本実験では、図 2 に示すように、曲げ試験で通常行うたわみ計測ではなく、純曲げ区間の試験体材軸方向の変形を計測した。上下の変位計から得られる材軸方向の変形により、純曲げスパンにおける平均曲率を算定する。

3. 曲げ試験による引張性能の推定方法

本研究では、より容易に引張性能の評価が可能な曲げ試験を行い、一軸引張試験との関係性を評価することを目的としている。そのためには、1 章で述べたように、簡易な表現モデルを用いることが望ましい。本研究では、疑似歪硬化性状を表現する引張応力-引張歪関係として、図 3 に示す完全剛塑性モデルを提案する。本モデルはパラメーターが 2 つのみで非常に簡易であり、また、後述する曲げ解析において、力とモーメントの釣合式から立式される中立軸に関する方程式の解を、解析的に表現可能である。完全剛塑性モデルの応力特性値を「引張強度」、歪特性値を「引張終局歪」と定義する。

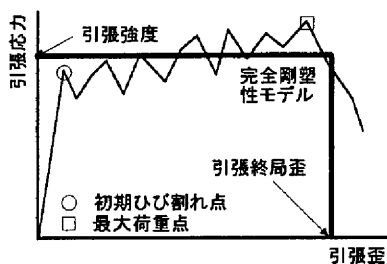


図 3 引張側応力-歪関係の完全剛塑性モデル

著者らが PVA-ECC を対象として行った断面解析⁹⁾によれば、本研究で対象とする材料の範囲では、曲げ加力における最大曲げモーメント時に引張縁歪が終局歪に達し、その時の圧縮縁歪は最大応力時歪に達しない。なお、文献 6) の断面解析では引張側力-歪関係を完全弾塑性モデルと仮定しているが、最大曲げモーメント時には引張側の弾性範囲部分のごくわずかで、完全剛塑性モデルとの差異はほとんどない。

したがって、PVA-ECC の曲げ加力時における最大モーメント時の応力分布を、図 4 のように仮定する。すなわち、平面保持を仮定し、圧縮側応力は三角形分布、引張側応力は一様分布とし、引張縁が引張終局歪に達し、圧縮縁では圧縮強度に達していない状態を仮定する。

圧縮縁から中立軸までの距離を x_n とすると、力とモーメントの釣合から次の式が成り立つ。

$$\frac{E \cdot \phi_u \cdot b}{2} \cdot x_n^2 = \sigma_{max} \cdot (D - x_n) \cdot b \quad (1)$$

$$M_{max} = \frac{E \cdot \phi_u \cdot b}{3} \cdot x_n^3 + \frac{\sigma_{max} \cdot b}{2} \cdot (D - x_n)^2 \quad (2)$$

ここで、

- E : 弾性係数
- ϕ_u : 最大荷重時の曲率 = $(\epsilon_{2u} - \epsilon_{1u}) / d_0$
- $\epsilon_{1u}, \epsilon_{2u}$: 最大モーメント時の、試験体上側および下側に設置した変位計による歪 (引張を正)
- d_0 : 2 つの変位計間の距離
- σ_{max} : 引張強度
- D : 試験体全せい
- b : 供試体幅
- M_{max} : 最大モーメント

(1) 式を (2) 式に代入して、両辺を bD^2 で除して下式を得る。

$$m_{max} = \frac{M_{max}}{b \cdot D^2} = \frac{E \cdot \phi_u \cdot D}{3} \cdot x_{nl}^3 + \frac{E \cdot \phi_u \cdot D}{4} \cdot x_{nl}^2 \cdot (1 - x_{nl}) \quad (3)$$

ここで、

$$x_{nl} = x_n / D \quad (\text{ただし, } 0 < x_{nl} < 1)$$

(3) 式の両辺を $E \cdot \phi_u \cdot D$ で除し、新たに m^* を定義すると、

$$m^* = \frac{m_{max}}{E \cdot \phi_u \cdot D} = \frac{x_{nl}^3}{3} + \frac{x_{nl}^2 \cdot (1 - x_{nl})}{4} \quad (4)$$

したがって、(5) 式が成り立つ。

$$x_{nl}^3 + 3x_{nl}^2 - 12m^* = 0 \quad (5)$$

(5) 式の解は (算出方法は付録に示す)、

$$x_{nl} = -1 + 2 \cos \frac{\theta}{3} \quad (6)$$

ただし、

$$\theta = \arccos(-1 + 6m^*) \quad (7)$$

したがって、次式から引張終局歪 ϵ_u と引張強度 σ_{max} が求められる。

$$\epsilon_u = \phi_u \cdot D \cdot (1 - x_{nl}) \quad (8)$$

$$\sigma_{max} = \frac{E \cdot \phi_u \cdot D \cdot x_{nl}^2}{2 \cdot (1 - x_{nl})} \quad (9)$$

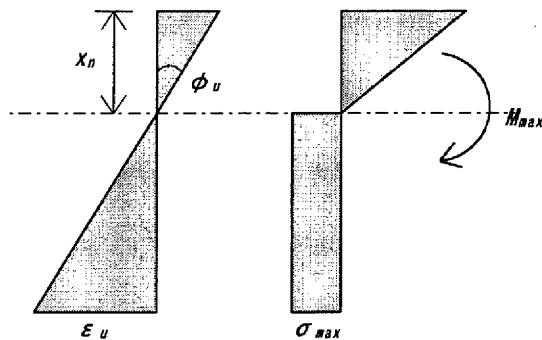


図 4 応力分布の仮定

4. 実験結果

体積繊維混入率 $V_f = 2.0\%$ の PVA-ECC の一軸引張および曲げ加力後のひび割れ状況例 (PVA20-5) を図 5 に示す。微細ひび割れが多数発生している状況が見取れる。変位計測区間内のひび割れ本数を目視により観察したところ、一軸引張試験体では 10 本/160mm、曲げ試験体では 12 本/100mm であった。 $V_f = 1.5\%$ の PVA-ECC においても 2.0% よりは少ないが同様の複数ひび割れが観察された。

引張応力-歪関係の例 (PVA20-2 および PVA15-2) を、図 6 に示す。引張歪は図 1 中の 2 つの変位計の平均値を検長で除した値である。また、図中の○は最大荷重点を示す。すべての試験体において、初期ひび割れ以降に応力が上昇する擬歪硬化性状を示した。ここで、最大荷重後の連続的な荷重低下中において歪が減少しているものがあるが、これは変位計設置範囲外のひび割れの開口により最終的に破壊したためである。表 3 に試験結果一覧を示す。ここで終局歪とは、変形の局所化により連続的に応力低下を引き起こす (引張軟化域) 直前の歪と定義する。つまり、終局歪は ECC が引張応力を

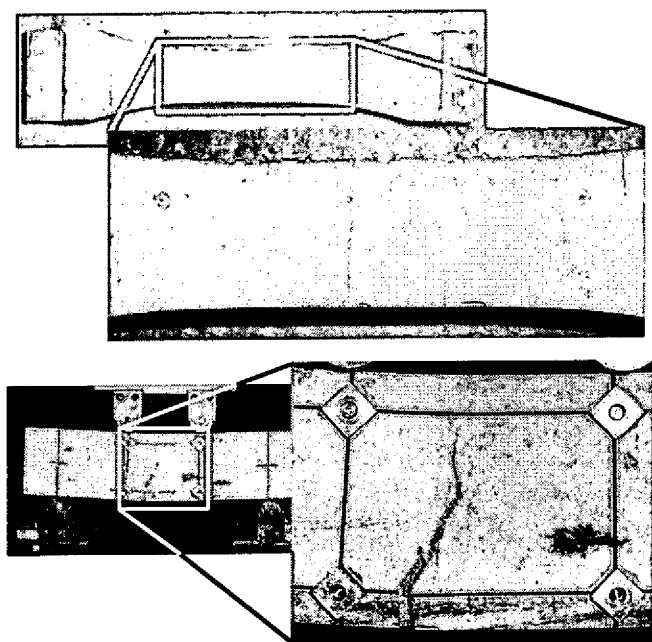


図 5 加力後のひび割れ状況 (上: 引張, 下: 曲げ)

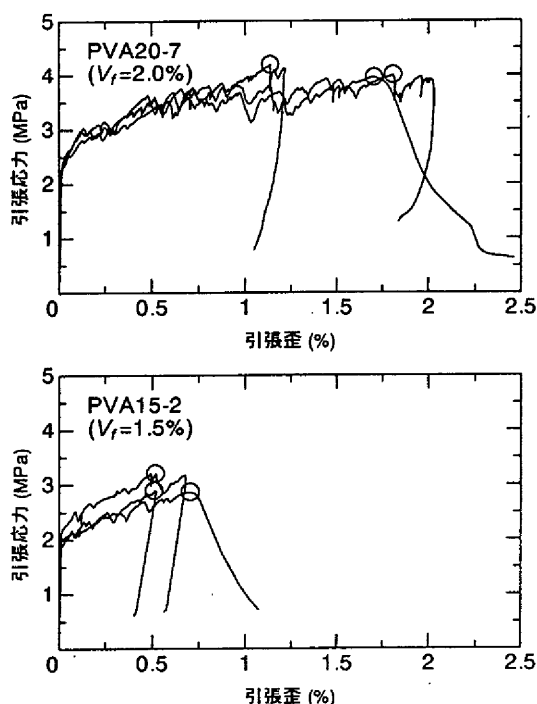


図 6 引張応力-歪関係

維持できる限界点を示すものと考えることができる。 $V_f = 2.0\%$ の PVA-ECC については終局歪が 1~3%, 引張強度が 3~4MPa 程度であった。

曲げモーメント-曲率関係の例 (PVA20-7 および PVA15-2) を図 7 に示す。曲率は図 2 に示す上下の変位計の歪の差を変位計間の距離で除したものである。曲げ試験も引張試験同様に、初期ひび割れが発生した後も荷重が上昇するたわみ硬化性状が認められる。表 3 に試験結果一覧を示す。試験結果は全て平均値であり、純曲げスパン外で最終破壊に至った試験体を除いたものである。

5. 引張性能評価

曲げ試験結果より (8), (9) 式を用いて引張性能の評価を行なった。評価結果を表 3 に、一軸引張試験結果との比較を図 8 に示す。一軸引張試験結果と曲げ試験による引張性能評価を比較すると、比較値の平均値は引張終局歪が 0.85, 引張強度が 0.82 となり、曲げ試験より算出した強度および歪の方が引張性能を高く評価する結果となった。これらの値は、対象とする材料の特性、曲げ試験体の寸法および加力条件に依存して変化するものと考えられる。この依存性は、引張性能が本質的には材料特性と考えることができるのに対し、曲げ性能が加力条件や試験体の寸法に大きな影響を受ける構造性能であることによるものであることから、説明され得ると考える。ここで、これらの比較値が持つ力学的意味について理論的に導くことは現状では容易ではないが、力学的な背景について以下に述べる。

引張終局歪に関する比較値は、4 章で述べたひび割れ本数の観察結果で見られるように、曲げによる複数ひび割れ現象が引張よりも容易に実現しやすいことを反映するものといえる。曲げ加力により、初期ひび割れ時の荷重よりも曲げ終局時の荷重が上回り、この両者の間にマルチプルクラックを伴って曲げ変位が増大するたわみ硬化について図 7 に実例を示した。このたわみ硬化は、図 6 に見られる

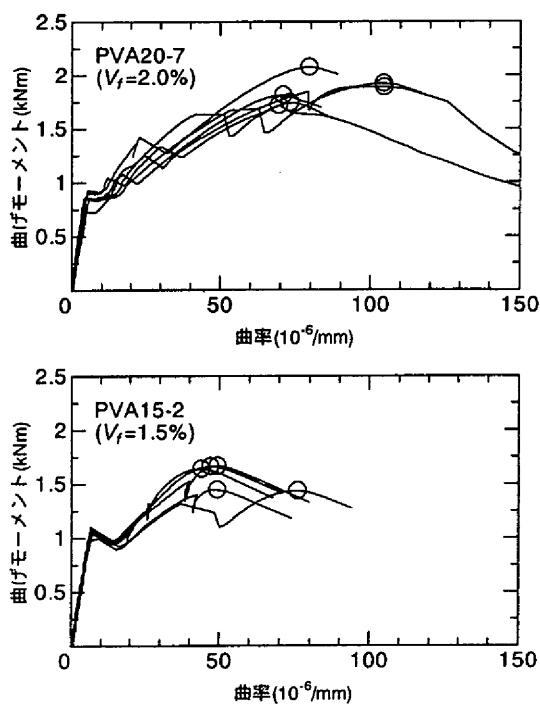


図 7 モーメント-曲率関係

表3 実験結果

名称	体積繊維混入率 V_f (%)	一軸引張試験		曲げ試験			
		終局歪* (%)	引張強度 (MPa)	最大モーメント時曲率 ($\times 10^{-6}/\text{mm}$)	最大モーメント (kN·m)	引張性能評価法	
						終局歪 (%)	引張強度 (MPa)
PVA20-1	2.0	1.19	3.37	201	2.07	1.72	4.58
PVA20-2		1.66	4.05	145	2.03	1.21	4.57
PVA20-3		2.02	4.16	267	1.66	2.36	3.59
PVA20-4		1.63	2.87	174	1.33	1.49	3.01
PVA20-5		2.92	4.18	349	1.53	3.10	3.33
PVA20-6		2.13	4.06	183	2.11	1.53	4.75
PVA20-7		0.91	3.40	83.9	1.86	0.67	4.33
PVA20-8		1.98	3.69	297	2.16	2.56	4.83
PVA20-9		2.10	3.60	344	2.30	2.99	5.07
PVA20-10		2.22	3.94	370	2.00	3.22	4.41
PVA20-11		2.59	3.27	382	2.25	3.32	4.97
PVA15-1	1.5	1.50	2.50	124	1.66	1.02	3.83
PVA15-2		0.64	2.99	52.8	1.55	0.41	3.66

* 連続的に荷重低下する直前の歪

引張における歪硬化と類似の現象ではあるが、たわみ硬化が実現する力学的条件は歪硬化と比較して緩やかである。引張載荷で歪硬化が生じるためには、少なくとも複合材料の引張強度はマトリクスのひび割れ強度以上なくてはならないから、この差は大きく、曲げでは引張よりも容易に複数ひび割れ現象が起こり易い。引張終局歪に関する比較値は、この曲げと引張における複数ひび割れ現象が生じる条件の違いを反映し、曲げから得られる終局歪の推定値を低減する意味づけを有するといえる。なお、引張終局歪が小さい領域（お

おむね 1.5%以下）では、むしろ一軸引張試験結果の方が曲げ試験結果より評価値が大きい傾向が見受けられる。これは繊維の分散性や配向等の終局歪を決定づける繊維架橋性能が、引張終局歪の小さい範囲では引張試験より曲げ試験の方が影響を受け易いことに起因するものと考えられる。すなわち、一軸引張下では断面内の一部に架橋性能が劣る箇所があっても、同一断面内の他の部分に余力が残っていればトータルとしては架橋性能が発揮される一方、曲げ試験での最大モーメントは引張縁で引張終局歪を迎えた時点であり、その引張終局歪は引張縁の最も架橋性能の弱い部分の終局歪によって決定されることによる。

また、引張強度の比較値は、曲げ解析で仮定した完全剛塑性による引張応力-歪関係と実際の差異を反映していることが考えられる。一般に、ECCの引張応力-歪関係は図6から類推されるように、初期ひび割れが生じた後に応力が漸増するパイリニアによる近似の方がより正確と考えられる。ここで用いた完全剛塑性モデルによる引張強度推定値は、モーメントの釣合を考えた場合、引張縁に近い応力値ほど曲げモーメントに寄与し、パイリニアによる平均的な引張応力よりも大きな値を示すと考えられる。

したがって、曲げ試験結果をもとにした引張性能の推定は、対象とする材料および曲げ試験の条件を限定した上で行なうことが必要であり、これら条件に応じて引張終局歪および引張強度の比較値が変化することになる。現状では、これらの値を理論的に導くことができる技術レベルになく、実験定数的に扱うことが現実的である。

本研究で対象とした PVA-ECC では、図8に示すように、引張試験から得られた特性値の曲げ試験に対する比の下限値は、引張終局歪および引張強度ともおよそ 0.7 であり、この値を低減係数として用いることによって、曲げ試験を PVA-ECC の引張性能に対する品質管理に利用することが可能であると考えられる。

6. まとめ

ECCを用いた構造部材の適用にあたり、材料引張性能を簡易な形で構造設計上考慮するという最終目標に向け、この引張性能の定量的評価を簡易に行うことができる曲げ試験方法を提案した。提案方法の精度の検証をするため、PVA-ECCを用いた曲げ試験を複数行ない、それぞれの曲げ試験結果を用いて引張性能を評価した、この評価結

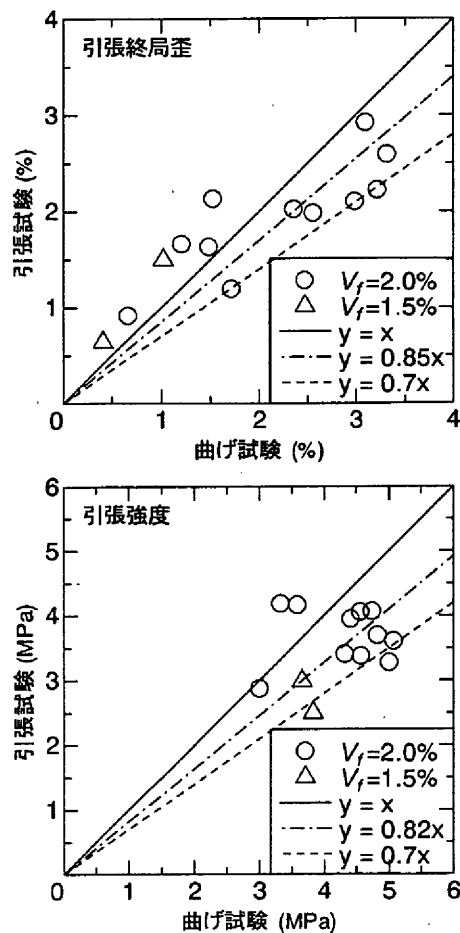


図8 引張性能評価法の検証

果を曲げ試験と同時に実施した一軸引張試験の結果と比較検討を行った。その結果、以下の知見を得た。

曲げ試験による引張性能は、曲げ試験に対する一軸引張試験の比較値が、引張終局歪で 0.85、引張強度で 0.82 であった。また、低減係数を 0.7 とすることで品質管理に利用可能であることが分かった。

しかしながら、この換算係数は、対象とする材料や曲げ試験体の寸法等に影響を受けるため、本研究の範囲において有効となる値で、この換算係数を一般化するための検討は今後の課題としたい。

謝辞

本研究を遂行するにあたっては、日本コンクリート工学協会「高靱性セメント複合材料の性能評価と構造利用研究委員会」(委員長：六郷恵哲岐阜大学教授)および日本コンクリート工学協会規準小委員会「高靱性繊維補強セメント複合材料基準作成 WG」(主査：金久保利之筑波大学助教授)における議論を参考にさせていただいた。関係各位に感謝いたします。なお、本研究で提案した曲げ試験方法は、上記 WG での議論を経て最終的に、日本コンクリート工学協会規準「繊維補強セメント複合材料の曲げモーメント-曲率曲線試験方法 (JCI-S-003-2005)」の一部に取り入れられている。

参考文献

- 1) Li, V.C.: From Micromechanics to Structural Engineering - The Design of Cementitious Composites for Civil Engineering Applications, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE, Vol.10, No.2, pp.37-48, 1993
- 2) 土木学会：複数微細ひび割れ型繊維補強モルタルの評価と利用，コンクリート技術シリーズ No.64, pp.1-32, 2005
- 3) 永井 覚，金子貴司，関田徹志，丸田 誠：高靱性繊維補強セメント複合材料を用いた制震ダンパの開発，鹿島技術研究所年報，Vol. 51, pp. 57-62, 2003
- 4) 関田徹志，斉藤 忠，坂田 昇，平石剛紀：PVA 繊維を用いた高靱性 FRC による吹付け補修材料の基礎的特性，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.23, No.1, pp.475-480, 2001
- 5) 日本コンクリート工学協会，高靱性セメント複合材料の構造利用に関する委員会報告書 (II)，pp.59-76, 2004
- 6) 清水克将，金久保利之，関田徹志，永井 覚：HPFRCC の一軸引張および曲げ性状に及ぼす打設方向の影響，コンクリート年次論文報告集，Vol.25, No.1, pp.281-286, 2003
- 7) 関田徹志，金久保利之，永井 覚，丸田 誠：曲げ試験を用いた高靱性複合材料 ECC の引張力学性能管理に関する実験的検討，鹿島技術研究所年報，第 52 号，pp.131-138, 2004
- 8) 古田昌弘，金久保利之，関田徹志，永井 覚：高靱性セメント系複合材料の一軸引張モデル評価法 (その 1：初期ひび割れ点の簡易実験評価法)，日本建築学会構造系論文集，第 568 号，pp.115-121, 2003.6

付録 (5)式の解について

(5)式の解について以下に記述する。

$$A = -1 + 6m^* + \sqrt{12m^*(1-3m^*)} \quad (\text{付 1})$$

とおくと、(5)式の解は、

$$x_{n1} = \begin{cases} -1 + A^{\frac{1}{3}} + A^{\frac{2}{3}} & (\text{付 2}) \\ -1 - e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot A^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{2\pi}{3}i} \cdot A^{\frac{2}{3}} & (\text{付 3}) \\ -1 - e^{\frac{2\pi}{3}i} \cdot A^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot A^{\frac{2}{3}} & (\text{付 4}) \end{cases}$$

となる。

i) $-1 + 3m^* < 0$ の場合

A は複素数となるが、(付 1)式を虚数単位 i を用いて表記すると、

$$A = -1 + 6m^* + i \cdot \sqrt{12m^*(1-3m^*)} \quad (\text{付 5})$$

と変形でき、絶対値 $|A|$ は、

$$|A| = \sqrt{(-1 + 6m^*)^2 + (\sqrt{12m^*(1-3m^*)})^2} = 1 \quad (\text{付 6})$$

となるから、(付 5)式をオイラーの公式を用いて、

$$A = \cos \theta + i \cdot \sin \theta = e^{i\theta} \quad (\text{付 7})$$

と表せる。ただし、

$$\theta = \arccos(-1 + 6m^*) \quad (\text{付 8})$$

よって(5)式の解は、

$$x_{n1} = \begin{cases} -1 + 2\cos \frac{\theta}{3} & (\text{付 9}) \\ -1 - 2\cos \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3} \right) & (\text{付 10}) \\ -1 - 2\cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3} \right) & (\text{付 11}) \end{cases}$$

と導ける。この 3 つの解の中で、条件 $0 < x_{n1} < 1$ を満たす解は(付 9)式のみとなる。

ii) $-1 + 3m^* \geq 0$ の場合

(付 2)式、(付 3)式および(付 4)式はいずれも条件 $0 < x_{n1} < 1$ を満足しない。

以上から、(5)式の解は、

$$x_{n1} = -1 + 2\cos \frac{\theta}{3} \quad (\text{付 12})$$

となる。

(2005年10月1日原稿受理，2006年2月23日採用決定)