2015年度 情報数学III

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2015
URL	http://hdl.handle.net/2241/00128232

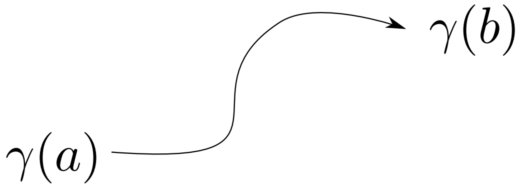
情報数学III講義（第4回）

平成27年11月5日

2.9　線積分

線積分とは，ベクトル場を力の場とした場合において，ある経路に沿って動いた際にどのくらい仕事をしたのか考えることである．線積分を計算する場合は，パラメータは自由でかまわないがどちらが始点でどちらが終点か向きをつける必要がある．

ここで下図のような $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ という空間中の曲線に沿って動いたときにどれだけ仕事がされるかについて考える．



力 $\boldsymbol{f}$ の中で曲線 γ に沿って動いたとき，

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$$

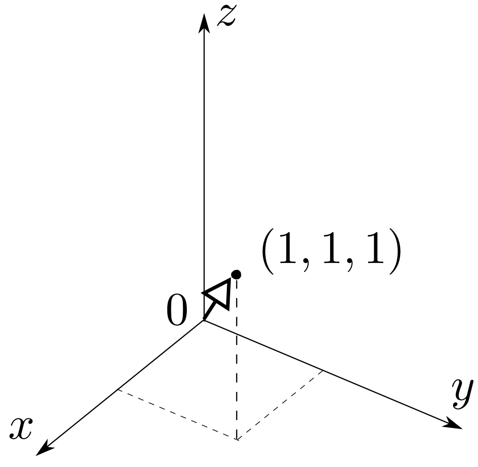
という仕事がなされる．$[a,b] \mapsto t$ とすると，

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

とおける．

例題1：$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma} : t \in [0,1] \mapsto (t,t,t)$ における仕事は，

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^2 + t + t^3) dt = \underline{\frac{13}{12}}$$

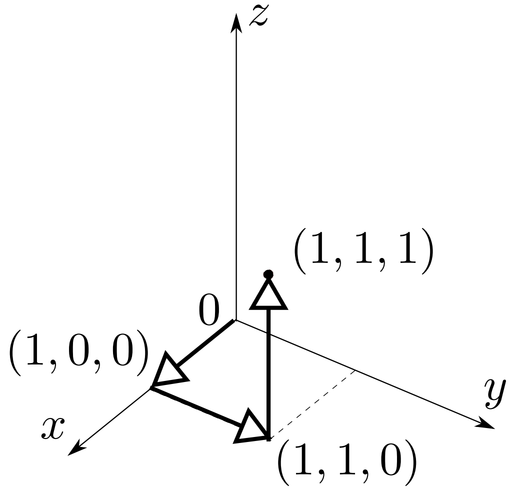


例題２：異なる経路が組み合わさった場合の線積分

$\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto (t,0,0),\ \gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto (1,t,0),\ \gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto (1,1,t)$ における仕事は,

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 (t^2 + t + t) dt = \underline{\frac{4}{3}}$$

このように，始点と終点が同じでも道のりによって仕事量・線積分の値は変わる．線微分が道によらないで始点と終点だけで決まるとき，$\boldsymbol{f}$ を保存力という．また，γ_1 逆向きの道を $-\gamma_1$ と表すと，$\int_{-\gamma} \boldsymbol{f} \cdot d\gamma = -\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\gamma$ が成り立つ．



2.10 線積分における微積分の基本定理

次は，スカラー場 φ の微分について考える．スカラー場を微分したもの $\varphi \xrightarrow{\text{微分}} d\varphi$ とは，ある道 $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ において以下の式が成り立つように定義したものになる．

$$\int_\gamma d\varphi = \varphi(\gamma(b) - \gamma(a))$$

この式を一般的に成立させるために，無限小のレベルで成り立つように定めると以下のように表せる．$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d$ において，

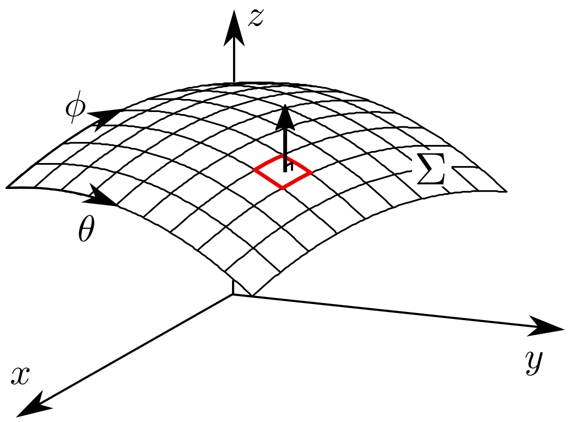
$$\begin{aligned} d\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d) &= \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d) - \varphi(\boldsymbol{x}) \\ &= \varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d \\ &= \partial_a(\boldsymbol{x})d \end{aligned}$$

最終的に，微分は以下の式で表せる．

$$\begin{aligned} \varphi'(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x})dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x})dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x})dz \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

2.11 面積分

それぞれの区間 $[a_1, b_1] \in \theta$，$[a_2, b_2] \in \phi$ について，曲面 $\Sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が定義されているとする．このとき，曲面 Σ を細分して微小領域ごとに面積の大きさの法線ベクトルを考える．



ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲面 Σ 上の面積分は，この法線ベクトルとベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の内積を，曲面 Σ 上のすべての微小領域にわたって加えた和で表せる．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(\theta, \phi)\right) \cdot \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi} \right) d\theta d\phi$$

線積分はベクトル場を力の場と考えて曲線に沿って動いた時にどれくらいの仕事をするかを考えたが，面積分ではベクトル場を流れの場として，単位時間にどれだけの流量が面を横切るかを考えている．このとき，パラメータの定義は自由だが，線積分と同様に向きをつけることが重要である．特に球面のように内と外を分ける（境界がない）曲面では外向きを表にする．表と裏を入れ替えた曲面を $-\Sigma$ で表すと，

$$\int_{-\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; -\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．

曲面の境界は曲線であるため，こちらも向きが重要となる．境界の向きは，曲面の表に旗を立ててやり，左手に旗が見えるように回るのが順方向と定義される．

実際に，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ という球面に対して計算する．ベクトル関数

$$\Sigma(\theta, \phi) \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi \\ a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$$

の表す曲面に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の面積分;

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算する．それぞれの偏微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \;=\; \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi \\ a\cos\theta\sin\phi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi} \;=\; \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\phi \\ a\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

法線ベクトルを表すベクトル積は,

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi} \;=\; \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\phi \\ a^2\sin^2\theta\sin\phi \\ a^2\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

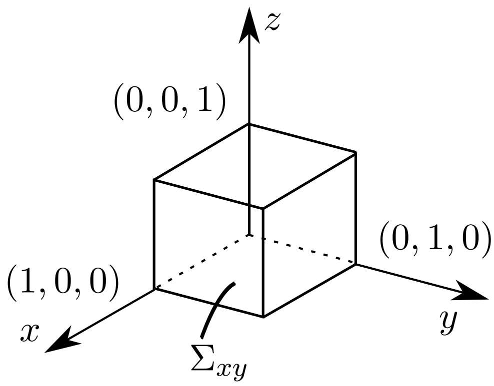
となるので，ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ との内積は以下のようになる．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}\left(\Sigma(\theta, \phi)\right) \cdot \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}\right) \\ &\quad= a^3\sin^3\theta\cos^2\phi + a^3\sin^3\theta\sin^2\phi + a^3\cos^2\theta\sin\theta \\ &\quad= a^3(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta) \\ &\quad= a^3\sin\theta \end{aligned}$$

あとは，二重積分を計算すれば良い．

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3 \sin\theta d\theta d\phi \;=\; a^3\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} d\phi$$
$$= \; 2a^3\Big[\phi\Big]_0^{2\pi} \;=\; 4\pi a^3$$

次に，標準基底で張られる平行六面体（立方体）について考える．閉曲面であるため向きに注意して，先ほどと同じベクトル場 $\boldsymbol{r}$ に対しての面積分を計算する．



まず，xy 平面と平行な面 $\Sigma_{xy} : [0,1]\times[0,1] \to (x,y,0)$ について注目すると，それぞれの偏微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial\Sigma_{xy}}{\partial x} \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Sigma_{xy}}{\partial y} \;=\; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

上面では，

$$\frac{\partial\Sigma_{xy}}{\partial x}\times\frac{\partial\Sigma_{xy}}{\partial y} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

となるので，面積分は

$$\int_{\Sigma_{xy}} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_0^1\int_0^1 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dxdy$$
$$= \; \int_0^1\int_0^1 z dxdy \;=\; z$$

となる．上面では $z = 1$ であるので面積分は 1 になる．今度は下面について考えてみると，向きが変わるので，

$$\int_0^1\int_0^1 -z dxdy \;=\; -z$$

ここで，下面では$z = 0$であるため，面積分は0になる．これは，この面から出入りする流量が無いということを意味する．このように，すべての面に対してこれを計算すると，立方体全体の面積分は3になる．