2015年度 情報数学III

情報数学III講義（第3回）

平成27年11月3日

2.4　ベクトル場とスカラー場の関係

電磁気学を学ぶために必要となるのがベクトル解析である．電磁気学という学問が出てくるのは19世紀のことで，ファラデーやマックスウェルが有名な人物である．

力学や万有引力の話をするのに必要となるのが微積分学である．微積分が生まれたのは17世紀のことで，ニュートンやライプニッツが有名である．

ベクトル解析で主に扱うのは，3次元（空間），ベクトル場，スカラー場と呼ばれるものである．

スカラー場とは，空間の各点にスカラーを対応させるもののことである．例えば，空間の各点に温度や湿度を対応させればスカラー場となる．また2次元の例になるが，地図上に高さ（海抜 xm）を対応させたり気圧を対応させたりしたものもスカラー場となる．

一方で，ベクトル場とは空間の各点にベクトルを対応させたものである．代表的なものとして力の場や流れの場が存在する．例えば，太陽を思い浮かべるとその周りには太陽に引っ張られる力が働いている．この力は向きと大きさを持つので，これはベクトル場で表せる．また空気や水の流れも方向と大きさを持つため，ベクトル場で表すことが出来る．

これまでは関数についての微分について学んできたが，ここからはある種の特別な微分，grad，rot，div を通して，スカラー場とベクトル場の関係について学ぶ．

$$(\mathbb{R}\text{ から }\mathbb{R}\text{ への})\text{ 関数} \xrightarrow{\qquad\text{微分}\qquad} \text{関数}$$

$$\text{スカラー場} \xrightarrow{grad} \text{ベクトル場} \xrightarrow{rot} \text{ベクトル場} \xrightarrow{div} \text{スカラー場}$$

2.5　力の場と流れの場の違い

ここでは，力の場と流れの場をベクトル場として同じ扱いをするのは少し違うのではないか，ということについて説明する．

まずプラトンが唱えたイデアについて説明する.

(主語)		(述語)
この犬	は	賢い

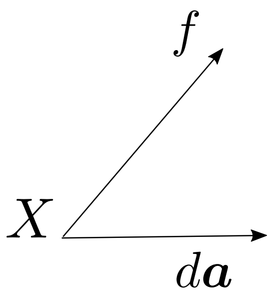
この文では,「この犬」がポチなら賢い犬とはポチのことになる.

(主語)		(述語)
美	は	永遠である

この文でにおける「美」とは何を指しているのだろうか．何も指していないとすると文章が無意味になってしまうので，どこかに「美」が存在するはずである．プラトンは，この「美」はイデアの世界（理想的な別の世界）にあると考えた．Platonismとはこうした考え方を指しており，Idealism（理想主義）はこれに由来する．
また，近代科学では根幹に測定や観測が存在し，物理的な値をどのように測定するかが重要視される．もしも科学実験に再現性が無いなら，得られた結果や導かれた法則を自分が信じるか信じないかで判断しなくてはならない．このような宗教的な話になるのを避けた近代科学の立場を，Pragmatism（操作主義）という．
以下では，力や流れの場を platonic に捉える場合と pragmatic に捉える場合について説明する．

- 力の場

  まず力の場について考える．力の場を測定するために，力の場の中で物を微小距離だけ動かすと仕事がなされる，と定義してみる．



$$d \in D$$
$$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$$

  点 X で力 $\boldsymbol{f}$ が働いたとして，その作用の元で X からベクトル $d\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと，なされる仕事は

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$$

  と表せる．
  ここで，空間の点に線形写像を対応させた以下の関数について考える．

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$$

この関数は線形である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}) &= \varphi(\boldsymbol{a_1})+\varphi(\boldsymbol{a_2}) \\
\varphi(\alpha\boldsymbol{a}) &= \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

が成り立つとする．
platonic ではなく plagmatic な立場で力を捉え直してみると，空間の各点に力を対応させるのではなく空間の各点に線形関数が与えられていると考えられる．両者は本質的には同じだが，大きく視点の変更が行われている．
このように空間の点 $\boldsymbol{x}$ に線形写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を対応させるものを**一次の微分形式**と呼ぶ．
標準規定 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をとり，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ と表すと

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{a}) &= \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + a_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + a_3\varphi(\boldsymbol{e}_3)
\end{aligned}
$$

と出来るので，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{e}_1) \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) \\ \varphi(\boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$ とすれば線形写像は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f}$ と表せる．
これは，ベクトルをスカラーにする線形写像は内積で表せるということであり，こうして力 $\boldsymbol{f}$ が再発見される．また，この写像を

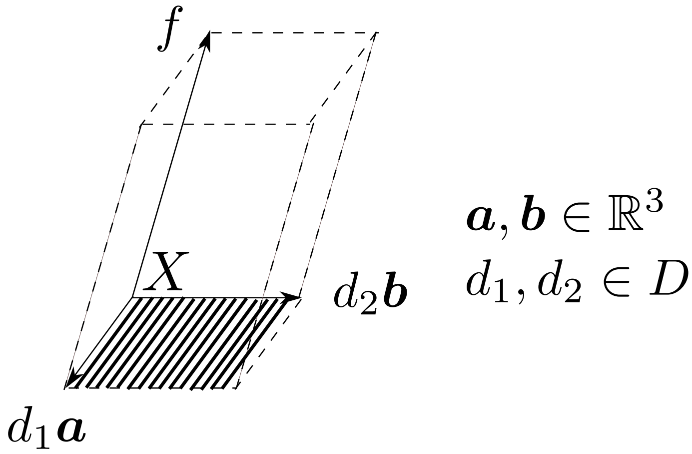
$$
\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \alpha_1,\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \alpha_2,\ \varphi(\boldsymbol{e}_3) = \alpha_3
$$

$$
dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1,\ dy : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto a_2,\ dz : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto a_3
$$

とすると，

$$
\varphi(\boldsymbol{a}) = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz
$$

と表せる．これは，dx, dy, dz は φ という線形写像の基底であることを表す．
このように，力をベクトルとして捉えるのが platonic な立場で，線形写像として捉えるのが pragmatic な立場である．



- 流れの場

流れの場について考える．

　ある点 X での流れをどのように測定するかというと，X を基点として 2 つのベクトル $d_1\boldsymbol{a}$，$d_2\boldsymbol{b}$ で張られる小さな升を作って単位時間に横切る水の量（体積）を測ればよい．

　ある時刻から升を横切った水が赤くなる仕掛けをしておく．単位時間が経過すると赤い平行六面体が出現するので，その体積を求めると

$$\boldsymbol{f} \cdot (d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}) = d_1 d_2 \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

となる．

ここで

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}$$

という関数を考える．これは二重線型で交代（変数を入れ替えると符号が逆になる）が成り立つ写像となり，**二次の交代形式**と呼ぶ.（力の場で定義した φ は一次の交代形式）

このような，空間の各点で二次の交代形式を対応させる写像を**二次の微分形式**という．

　今度は逆に，$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を二次の交代形式とする．

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_2\boldsymbol{e}_2$ に

対して

$$\begin{aligned}
&\psi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\
&= \psi(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= a_1b_1\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+a_2b_2\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)+a_3b_3\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\\
&\quad +(a_2b_3-a_3b_2)\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+(a_3b_1-a_1b_1)\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)+(a_1b_2-a_2b_1)\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{f} \quad \left(\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\ \psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)\\ \psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\end{pmatrix}\text{とした}\right)
\end{aligned}$$

となる．式の整理には，

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i) &= -\psi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)\\
2\psi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i) &= 0\\
\psi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i) &= 0
\end{aligned}$$

であることと，

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) &= -\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\\
\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) &= -\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\\
\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1) &= -\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)
\end{aligned}$$

であることを用いている．
つまり，ψ は $\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3),\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1),\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ が決まれば求められる．
また，くさび形積 (wedge product) を以下のように定義し，

$$dy\wedge dx:(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}^3\mapsto a_2b_3-a_3b_2=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

$$dz\wedge dy:(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}^3\mapsto a_3b_1-a_1b_3=\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}$$

$$dx\wedge dy:(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}^3\mapsto a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

$\psi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\alpha_1,\psi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)=\alpha_2,\psi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\alpha_3$ とすると，ψ は以下のように一意的に決められる．

$$\psi=\alpha_1dy\wedge dz+\alpha_2dz\wedge dx+\alpha_3dx\wedge dy$$

　こうして，流れのベクトル $\boldsymbol{f}$ が再発見される．流れの場をベクトルと捉えようが二次の交代形式と捉えようが数学的には同じ事といえるが，明らかに大きな始点の変更が行われている．

- 一次の交代形式（線型写像）は線型空間を作る
- 二次の交代形式も同じように線型空間を作る
- 空間の各点に一次の交代形式を対応させることを，一次の微分形式という（力の場）
- 空間の各点に二次の交代形式を対応させることを，二次の微分形式という（流れの場）

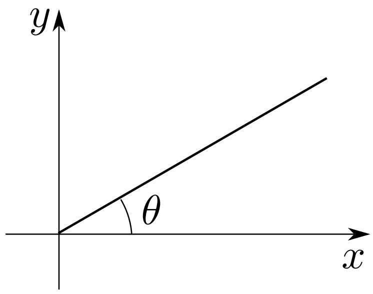
2.6 極座標

§ 平面

極座標では (x, y) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と x 軸の正方向の成す角 θ で表す．
直交座標 (x, y) との関係は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

なお，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ である．

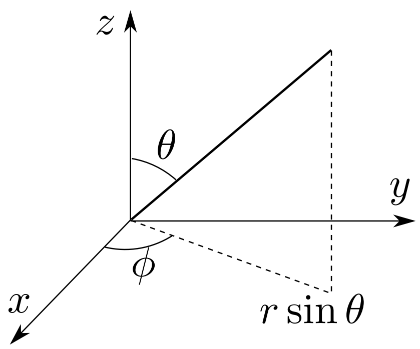


§ 空間

空間では (x, y, z) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と z 軸の正方向の成す角 θ と，xy 平面上の r の正射影 $r\sin\theta$ と x 軸の成す角 ϕ で表す．
直交座標 (x, y, z) との関係は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

なお，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．

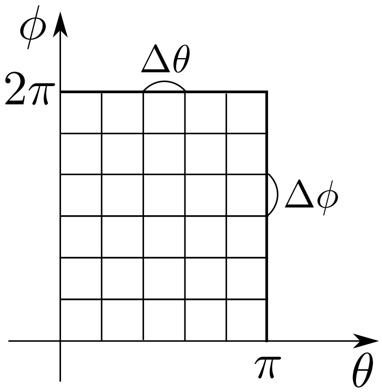


2.7 面積分

原点 O を中心とする半径 a の球面を考える．この媒介変数表示は以下のようになる．

$$\begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\phi \\ y &= a\sin\theta\sin\phi \\ z &= a\cos\theta \end{aligned}$$

なお，$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．このとき，球の表面積を求めるためには，図のようにパラメータを細分する．ただし，$\Delta\theta \in D,\ \Delta\phi \in D$ とする．



球の表面を Ω，つまり (θ, ϕ) に対する球面上の点を $\Omega(\theta, \phi)$ とする．この細かく分けた小さな部分は，直交座標では微小な平行四辺形になっているためその面積を求める．平行四辺形の面積は，2 つのベクトルのベクトル積の大きさ：

$$\left|\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\Delta\theta \times \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\Delta\phi\right|$$

を求めれば良いことになる．したがって，球の表面積はすべて加え合わせれば求まるので，積分を用いて以下を計算する．

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\right| d\theta d\phi$$

実際に計算するとそれぞれの偏微分は，

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi \\ a\cos\theta\sin\phi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\phi \\ a\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，このベクトル積は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Omega}{\partial\phi} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \\ -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\phi \\ a^2\sin^2\theta\sin\phi \\ a^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

この大きさをとって整理すると，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\right| &= \sqrt{(a^2\sin^2\theta\cos\phi)^2 + (a^2\sin^2\theta\sin\phi)^2 + (a^2\cos\theta\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{a^4\sin^2\theta(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)} \\
&= \sqrt{a^4\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \\
&= a^2\sin\theta
\end{aligned}$$

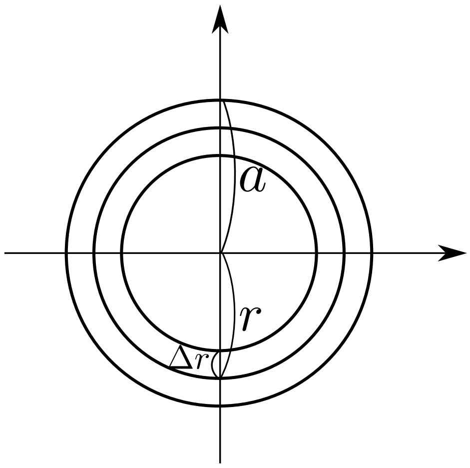
となる．あとは積分をすると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\right| d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} a^2\sin\theta d\theta\right) d\phi \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} d\phi \\
&= 2a^2\int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi a^2
\end{aligned}$$

以上より，半径 a の球の表面積の式 $4\pi a^2$ が得られた．このように，曲面を細分してそれらを足し合わせる積分を面積分という．

半径 r の球の体積は $V(r) = 4\pi r^3/3$，表面積は $S(r) = 4\pi r^2$ である．2 つには $V'(r) = S(r)$ という関係が成り立っているが，これについて考える．

まず，$[0, a]$ の区間を細分し，$\Delta r \in D$ となるくらい細かく分ける．



半径 r の球と半径 $r + \Delta r$ で囲まれる領域の体積は $S(r)\Delta r$ であるので，これを細分したすべてに対して加え合わせると，

$$V(r) \ = \ \int_0^a S(r)dr$$

というように，球の体積が表面積から得られる．

2.8 微積分学の種明かし

$f\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であるとき，微積分学の基本定理は，

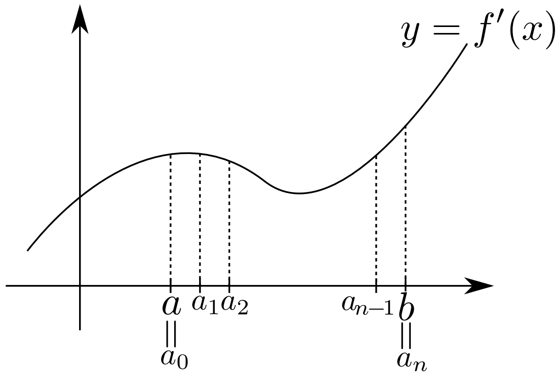
$$f'(x)dx \ = \ f(b) - f(a)$$

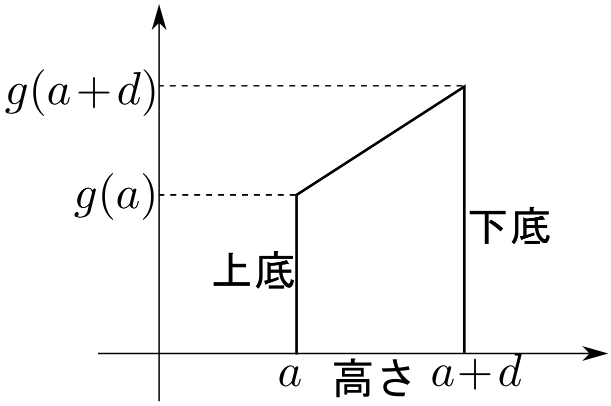
が成り立つということだった．高校の微分の定義は極限を使って定義するが，これについて考える．図のように $y = f'(x)$ の区間 $[a, b]$ を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．そうすると，

$$\int_a^b f'(x)dx \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)dx$$

となる．なお，$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$ となるくらい細かくする．このとき，a_i の隣の点は $a_{i+1} = a_i + d_i$ と表せる．ここで，次の積分を考える．

$$\int_a^{a+d} g(x)dx$$





Kock-Lawvere の公理より，$g(x)$ は直線になる．したがって，細分した各領域の面積を得るには台形の面積を算出すれば良いことになる．
台形の面積は $\{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times (\text{高さ})/2$ なので，

$$\frac{1}{2}d(g(a) + g(a) + g'(a)d) \ = \ g(a)d$$

となる．この $g(a)d$ というのが先ほどの $f'(a)d$ にあたる．これは微積分学の基本定理である．Kock-Lawvere の公理より，任意の d に対して αd となるような実数 α が一意的に定まり，我々はこの α を $f'(a)$ と置いた．

$$\underbrace{\int_a^{a+d} f'(x)dx}_{f'(a)d} \ = \ f(a+d) - f(a) \ = \ \alpha d$$

つまり,「無限小のレベル」で微積分学の基本定理が成り立つように微分を定義したということである．これらを用いて実際に $f'(x)$ の区間 $[a,b]$ に対しての積分を

整理すると

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&= (f(a_1) - f(a_0)) + (f(a_2) - f(a_1)) + \cdots \\
&= f(a_n) - f(a_0) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}
$$

となる.