2015年度 情報数学III

情報数学III講義（第2回）

平成27年10月23日

1.7 多変数の微分

- 1変数 $y = f(x)$ の場合

  $f(x)$ 上にある点を (x_0, y_0) として，x の変化量 $\Delta x = x - x_0$ と y の変化量 $\Delta y = y - y_0$ について考える．このとき Δy は $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ と一般的に複雑な形になる．この複雑な $f(x)$ による関数を簡単にするため，点 (x_0, y_0) における接線を用いて近似すると $\Delta y = a\Delta x$ (a は定数, $a = f'(x_0)$) のようにひとつの数で特徴付けられた比例関数で表せる．

- 2変数 $z = f(x, y)$ の場合

  $z_0 = f(x_0, f_0)$ とする．x の変化量 $\Delta x = x - x_0$，y の変化量 $\Delta y = y - y_0$ に対して z の変化量 $\Delta z = z - z_0$ について考える．関数 z を微分すると接平面が得られ，$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ (a, b は定数) と表せる．a を求めるには，$f(x)$ を $\Delta y = 0$ と y の値を固定して得られる x の1変数関数 $f(x, y_0)$ とみなして x で微分すればよい．

  $$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

  同様に，b を求めるには $\Delta x = 0$ とする．

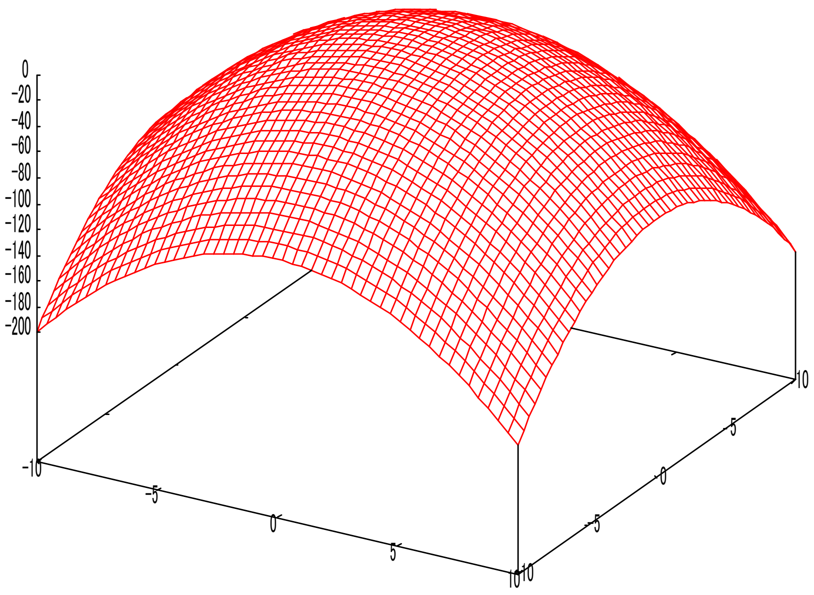
  $$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

  これを偏微分と呼ぶ．a を求める偏微分のイメージは，図1.7のような風呂敷状のグラフを xy 平面と平行に切断して得られる断面での微分といえる．

1.8 様々な写像

これまで $\mathbb{R}$ への関数を見てきたが，他にも $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ への関数，たとえば

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{(平面上の運動)}$$



$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{(空間上の運動)}$$

などが考えられる．例えば $\mathbb{R}$ を時間，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点，$\mathbb{R}^3$ を空間内の点とすれば，上の二つは平面上の運動，空間内での運動を表す関数と考えられる．

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ の場合

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

  と多変数の微分を行列の積で表すことができる．

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合

  f を $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の 2 つに分けて $f(x, y) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(x, y) \\ \Delta f_2(x, y) \end{pmatrix}$ と置けるとする．

$z_1 = f_1(x, y), z_2 = f_2(x, y)$ とすると以下のように表せ,

$$\Delta z_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$
$$\Delta z_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

これらをまとめることで,

$$\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

と行列の積で表せる.

以上をまとめると,

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の関数を微分すると比例関係が出る.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の関数を偏微分すると行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ が出る.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の関数を偏微分すると $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ が出る.

  このように,線形写像を行列の形で考えることが出来る.

1.9 合成関数の微分

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ のとき,合成関数 $g \circ f$ の微分は以下で表される.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\dot{f}'(x)$$

多変数の合成関数の微分を行うために,これを一般化する.$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$ のとき,合成関数 $g \circ f$ の微分は以下で表される.

$$(g \circ f)'(\boldsymbol{x}) = \underbrace{g'(f(\boldsymbol{x}))}_{l \times m} \cdot \underbrace{f'(\boldsymbol{x})}_{m \times n}$$

例えば，1 変数の場合は 1×1 の行列の積と考えればよい．
また，$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ の場合は $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \to z$ と表され，微分は以下のようになる．

$$g'((f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} f(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \quad 1 \times 2 \text{ の行列}$$

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ の行列}$$

最終的に，行列を掛け算すると以下のように表せる．

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$$

このように，線形写像の合成を行列の掛け算で記述することが出来る．

1.10 多変数の Kock-Lawvere の公理

2 乗すると 0 になる数，その全体を D として以下のように表す．

$$D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\} (\neq 0)$$

この D を用いて，以下の Kock-Lawvere の公理を定義する．

$$\exists ! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x+d) - f(x) = ad \quad (\forall d \in D) \tag{1}$$

この公理は n 次元でも成り立ち，以下では n 次元における微分を示す．
$f : D \to \mathbb{R}^n, f(d) = \begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix}$ とすると，$f_i : D \to \mathbb{R}$ に対して Kock-Lawvere の公理から

$$\exists ! a_i \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f_i(d) - f_i(0) = a_i d \quad (\forall d \in D) \tag{2}$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
f(d) &= \begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(0)+a_1d \\ \vdots \\ f_n(0)+a_nd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ f_n(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} d \\
&= f(0)+\boldsymbol{a}d \quad (\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\text{ とした})
\end{aligned}
$$

と変形することが出来る．また，$f : D^2 \to \mathbb{R}^m$ の場合を示す．$d \in D \mapsto f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d) \in D^m$ という関数に対して，多変数の Kock-Lawvere の公理から以下が成り立つ．

$$\exists! a \in \mathbb{R}^m \quad \text{s.t.} \quad f(\boldsymbol{x}+d)-f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}d \quad (\forall d \in D) \tag{3}$$

このただひとつの $\boldsymbol{b}$ を $\partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ と書く．$\partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ にも $\boldsymbol{a}$ 依存する．
ここで，$\partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ が以下の二つを満たした線形変換であることを示す．

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}) = \alpha\partial_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}) \\
&\partial_{\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

- $\partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x}) = \alpha\partial_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ の証明

  $$f(\boldsymbol{x}+(\alpha\boldsymbol{a})d) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\alpha\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})d$$

  であることと，

  $$f(\boldsymbol{x}+\alpha(\boldsymbol{a}d)) = f(\boldsymbol{x}) + \alpha\partial_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})d$$

  からわかる．

- $\partial_{\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x})$ の証明

  $$f(\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{a_j})d) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x})d$$

であることと，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{a_j})d) &= f((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a_i}d)+\boldsymbol{a_j}d) \\
&= f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a_i}d)+(\partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a_i}d))d \\
&= f(\boldsymbol{x})+\partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x})d+(\partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x})+\partial_{\boldsymbol{a_j}}\partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x})d))d \\
&= f(\boldsymbol{x})+\partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x})d+\partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x})d \\
&= f(\boldsymbol{x})+(\partial_{\boldsymbol{a_i}}f(\boldsymbol{x})+\partial_{\boldsymbol{a_j}}f(\boldsymbol{x}))d
\end{aligned}$$

からわかる．

§ 行列表現

関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して微分を以下のように表す．

$$f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) = \partial_{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$$

これは線型写像 $f':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ と考えることができる．いま，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1=(1\ 0\ \cdots\ 0)^T$ として

$$f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1) = \partial_{\boldsymbol{e}_1}f(\boldsymbol{x})$$

を用いると公理より以下のようになる．

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_1 d) &= f(\boldsymbol{x})+\partial_{\boldsymbol{e}_1}f(\boldsymbol{x})d \\
f(\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}d) &= f(\boldsymbol{x})+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})d
\end{aligned}$$

x_2から x_n は動かしていないので，x_1 で偏微分していることになる．

次に，$\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T = a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$ について考える．これは線型写像なのでそれぞれに分けられることを思い出すと，以下のように整理できる．

$$\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{x})(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= a\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})}+a_2\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})}+\cdots+a_n\,\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ のとき，$f':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $1\times n$ 行列で表せる．

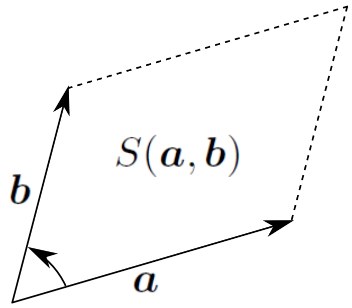
2　ベクトル解析

ベクトル解析は電磁気学のために作られた数学で主に 3 次元の空間を扱う．ベクトル解析ではスカラー場とベクトル場の 2 つが出てくる．それぞれの例を挙げると，スカラー場とは部屋の各点に温度や湿度などを対応させたりしたもので数で表される．ベクトル場は大きく分けて 2 種類あり，1 つは太陽と地球間の万有引力などの「力の場」で，もう 1 つは部屋の中の空気の流れを表す「流れの場」である．これらの力や流れのベクトルを各点に対応させて扱うのがベクトル解析である．

2.1　行列式

§ **平面**; $\mathbb{R}^2$

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と表す．



ただし，これは符号がついた面積であり，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ回った時に，反時計回りであれば正，時計回りであれば負と定義される面積である（右手系）．

平行四辺形の符号付き面積の性質

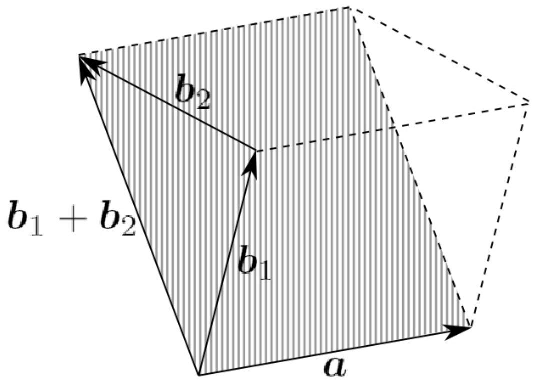
(1)
$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= -S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) &= -S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$
(交代性)

(2)
$$\begin{aligned} S(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ S(\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) &= \beta S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) &= S(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) \\ S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) &= S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2) \end{aligned}$$

性質 (1),(2) は符号の決め方や平行四辺形の形状がどうなるかを考えれば自明である．性質 (3) について説明する．これは以下の図において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ により張られ

る 2 つの平行四辺形が，斜線で示した $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ で張られる平行四辺形と面積が一致することを表す．斜線内に存在する三角形と斜線外の三角形は合同なのは明らかであるため両辺が等しくなる．これらから符号付き面積 S には線型性が成り立つことがわかる．したがって，二重線型の性質をもつ．



標準基底 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ について考えると，

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) &= S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) = 0\\
S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) &= 1\\
S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) &= -1
\end{aligned}
$$

となる．これを踏まえて，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$ と表して面積 S を考える．

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= S(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\
&= a_1b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}_{=0}+a_1b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}_{=1}+a_2b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)}_{=-1}+a_2b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)}_{=0}\\
&= a_1b_2-a_2b_1
\end{aligned}
$$

これは紛れも無く行列式 (determinant)：

$$
\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1
$$

を表している．

§ **空間**；$\mathbb{R}^3$

ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ で形成される平行六面体の符号付き体積を $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と定義する．符号は，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回した時に，ねじが進む方向に $\boldsymbol{c}$ が向いてい

れば正，反対側ならば負とする（右手系）．

平行六面体の符号付き体積の性質

$$\begin{aligned}
&(1) \quad & V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= -V(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
& & V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) &= 0 \\
&(2) \quad & V(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
&(3) \quad & S(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + V(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})
\end{aligned}$$

符号付き体積 V には三重線型性かつ交代性が成り立つ．

次に，標準基底：

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって張られる平行六面体を考える．これは立方体であるため体積は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) &= V(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = V(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1 \\
V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) &= V(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = V(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -1
\end{aligned}$$

最後に，平面のときと同様にそれぞれのベクトルを

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

とおいて $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を計算すると，

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

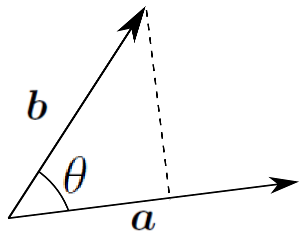
のように行列式が出てくる．

2.2　内積（スカラー積）

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表すと以下のように定義される．

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; |\boldsymbol{a}| \underbrace{|\boldsymbol{b}| \cos\theta}_{\text{正射影の影の長さ}}$$

したがって，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ という写像となる．



内積の性質を示す．

内積の性質

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \\
(2) & (\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) & (\alpha \in \mathbb{R}) \\
 & (\boldsymbol{a}) \cdot \beta \boldsymbol{b} \;=\; \beta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) & (\beta \in \mathbb{R}) \\
(3) & (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b} & \\
 & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \;=\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_2 &
\end{array}
$$

性質 (1) は内積が対称であることを表す．性質 (2),(3) より $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の片方を固定した時に線型写像になることがわかる．このような性質を二重線型写像という．

標準基底の内積は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \;&=\; \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \;=\; 0 \\
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 \;&=\; \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \;=\; 1
\end{aligned}
$$

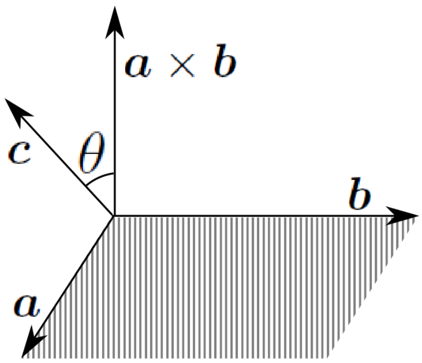
$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のとき，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2$ と表すと，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;&=\; f(a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2, b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2) \\
&=\; a_1 b_1 f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_1 b_2 f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_2 b_1 f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_2 b_2 f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\
&=\; (a_1 \;\, a_2) \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \\ f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と書ける．

2.3　外積（ベクトル積）

ベクトル積を $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と定義する．これは幾何学的には「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形に対して右手系になるように直交する，大きさが平行四辺形の面積と等しいベクトル」を表す．



外積の性質を示す．

外積の性質

$$
\begin{aligned}
&(1) & \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\\
&(2) & (\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} &= \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\
& & \boldsymbol{a}\times(\beta\boldsymbol{b}) &= \beta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\
&(3) & (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}\\
& & \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2
\end{aligned}
$$

性質 (1),(2) は外積の定義より自明である．性質 (3) について説明する．2.1 節で符号付き体積 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ について触れたが，これをベクトル積を用いて表すと以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\
&= \underbrace{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}_{\text{底面積}}\,\underbrace{|\boldsymbol{c}|\cos\theta}_{\text{高さ}}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は 2 つのベクトルが張る平行四辺形に直交するベクトルであり，長さ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ は平行四辺形の面積（底面積）と等しい．このベクトルに対する $\boldsymbol{c}$ の正射影は平行六面体の高さと等しいので，体積 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と一致する．ここで，体積 V に関しては三重線型性を示してあるので，これを利用して $V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を展開して整

理する．

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
&= V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\
&= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\
&= \{(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})$ とおくと，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}$ が示されたことがわかる．したがって $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{c}=0$ である．このとき，$\boldsymbol{c}$ は任意の空間のベクトルでよいので，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とすれば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=0$ となり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ が得られる．以上より，性質 (3) が成立することが示せた．また，$\boldsymbol{b}$ についても同様の式が成り立つため，ベクトル積は二重線型性を持つことがわかる．

標準基底：

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
$$

の外積は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3 \\
&\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1 \\
&\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}
$$

これを踏まえて，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

を用いて $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を展開せよ．