情報数学III講義（第9回）

平成28 年2 月18 日

3.12　複素関数論の利用方法

複素平面内の閉曲線内の領域を γ，この領域内外で正則な複素関数を $f(z)$ とする．この関数内部に定義されていない点 w（特異点，極）が存在する場合，単純に Stokes の定理を用いて積分を計算することは出来ない．そこで，**コーシーの積分定理**を用いて特異点における値を以下のように表す．

$$
\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-w}dz - \int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-w}dz\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}dz - \int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}dz\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}dz - \int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{w-a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，2 つの線積分はそれぞれ冪級数で表現できるので，

$$
f(w) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i(w-a)^i
$$

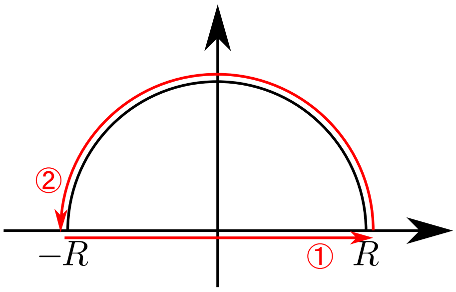
のような形で書ける．なお，α_i はそれぞれの積分の値である．これを**ローラン展開**といい，α_{-1} のことを関数 f の a における**留数**といい $\mathbf{Res}(f;a)$ と表す．

今回は，複素関数論を用いて次の実関数の具体的な積分値を求め方について説明する．

$$
\int_{i=-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
$$

まず複素数で定義された関数 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ を考え，図のような半円の経路 $\gamma_R = \gamma_R^1 + \gamma_R^2$ を設定する．

$$
\int_{\gamma_R} f dz = \int_{\gamma_R^1} f dz + \int_{\gamma_R^2} f dz
$$



①が γ_R^1 に，②が γ_R^2 にあたる．
　このとき，$R \to \infty$ とすると $\int_{\gamma_R^2} f dz = 0$ となるため（詳細は節 3.14），

$$\int_{\gamma_R^1} f dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

のみを考えればよい．
また R が十分に大きくなれば関数 $f(z)$ の 2 つの極が半円内に入り，それぞれ a_1, a_2 とすると，留数定理から以下の式が成り立つ．

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(\mathbf{Res}(f;a_1) + \mathbf{Res}(f;a_2))$$

このとき，$f(z)$ を 4 つの極 a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて以下の式で表せる．

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{1+z^4} \\ &= \frac{z^2}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} \\ &= \frac{z^2}{z-a_1} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z-a_0)^i \end{aligned}$$

最終的に求めたいのは $\mathbf{Res}(f;a_1)+\mathbf{Res}(f;a_2)$ なので，まずは上の式の $\alpha_0 = \mathbf{Res}(f;a_1)$ を計算すればよい．そこで，以下の $g(z)$ の $z = a_1$ を求める．

$$g(z) = \frac{z^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}$$

ここで，$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\begin{aligned} g(a_1) &= \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} \end{aligned}$$

同様に，$g(z)=\frac{z^2}{(z-a_1)(z-a_3)(z-a_4)}$ において $z=a_2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
g(a_2) &= \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}-(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}-(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}-(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}} \\
&= -\frac{1}{2(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

となるので，$g(a_1)+g(a_2)=-\frac{i}{2\sqrt{2}}$ が得られる．最終的に，$\int_{\gamma_R} f dz = 2\pi i \cdot -\frac{i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$ となる．

3.13 偏角

指数関数 e^x はテイラー展開より以下のような冪級数として表現できる．

$$
e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots
$$

これに対して，$z \in \mathbb{C}$ を用いて複素平面上の関数 e^z を定義した．

$$
e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots
$$

ここで，z は複素数であれば何でも良いので純虚数 $i\theta(\theta \in \mathbb{R})$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \cdots \\
&= \left\{1 - \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \cdots\right\} + i\left\{\theta - \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots\right\} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
$$

と整理できる．指数法則 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ は二項定理を用いて複素関数でも成り立つことを確認した．それから，指数法則を用いることで，

$$
e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)
$$

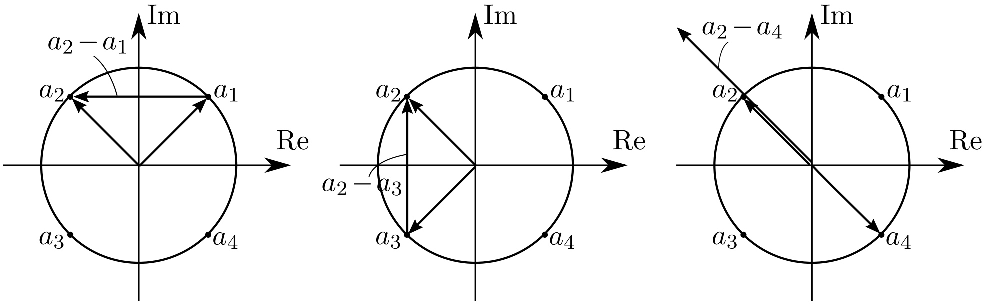
と書ける．ここで，この複素数の絶対値は e^x であり，y はこの複素数の偏角という．いま，$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{z_1+z_2} \\
&= e^{(x_1+x_2)}e^{i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1}e^{x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))
\end{aligned}
$$

と表すことができて，絶対値は $e^{x_1}e^{x_2}$ という積になり，偏角は y_1+y_2 のような和となる．この性質を用いると前節で計算した

$$
\begin{aligned}
g(a_1) &= \frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} \\
g(a_2) &= \frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}
\end{aligned}
$$

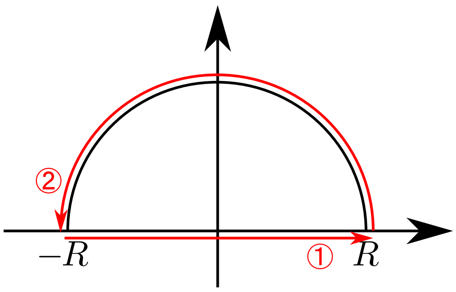
について，簡単に計算することができる．例えば，$g(a_2)$ の分子である a_2^2 について，偏角 $\arg a_2$ の 2 倍の位置に回転される．分母については，(a_2-a_1), (a_2-a_3), (a_2-a_4) をベクトルのように扱い，それぞれの偏角の和を取ることで分母全体の偏角が得られる．



あとは除算が残るので，それぞれの偏角の差を取る（逆回転する）ことで，律儀に $g(a_2)$ を計算しなくとも $g(a_1)$ で得られた結果をもとに実数と虚数の符号がわかる．重要なのは，複素数の乗算が複素平面上で回転を意味するということである．

3.14　積分路の計算

節 3.12 では，半円の経路のうちの図の①の積分路のみを計算したが，②を計算しなくても良いことを示す．



γ 上で $|f(z)| \leq M$ のとき，L を γ の長さとすると以下が成り立つ．

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$$

この不等式を考慮して，$\dfrac{z^2}{z^4+1}$ について考えると，$M=\dfrac{R^2}{R^4}$ となり半円の円周 πR より，$\dfrac{1}{R}$ が得られる．このとき，$R\to\infty$ とすると，$\dfrac{1}{R}\to 0$ となるため，積分路②が 0 に近づくことがわかる．

問題

次を求めよ．

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \left(= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \right) \\
&(2) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0) \\
&(3) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x - 1}{x}dx \\
&(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} \qquad (a>0)
\end{aligned}
$$

補足

問題 (2) について，$z^2+a^2=0$ のときに極となるため，極になる点は $z=\pm ai$ である．したがって，次のように変形できる．

$$f(z) \;=\; \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} \;=\; \frac{1}{(z-ai)^2}\frac{z^2}{(z+ai)^2}$$

ここで，$g(z) = \dfrac{z^2}{(z+ai)^2}$ とおくと $g(z)$ は ai のところでは正則なので，$g(z) = \alpha_0+\alpha_1(z-ai)+\alpha_2(z-ai)^2+\cdots$ となる．これを用いると，以下のように書き換えられる．

$$\frac{g(z)}{(z-ai)^2} \;=\; \frac{\alpha_0}{(z-ai)^2}+\frac{\alpha_1}{z-ai}+\alpha_2+\cdots$$

さきほどは重解がなかったため α_0 を求めればよかったが，この場合は重解になるため，留数を求めたければ α_1 を計算すれば良い．したがって，α_1 は微分を用いて次のように計算できる．

$$g'(z) \;=\; \alpha_1 + 2\alpha_2(z-ai)$$

最後に，これは留数定理を使うわけではないが次の式を考える．

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1)$$

まず，偶関数であるため次を求めれば良い．

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

このとき，$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，逆数は $\dfrac{1}{z}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ となる．これらは指数法則が成り立つため，$e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=1$ となることがわかる．また，この 2 つを足して割ると以下の式が得られる．

$$\cos\theta \;=\; \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

ここで，$\dfrac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ から $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であるため，$\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \to e^{i\theta}$ とすると，以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} &= \int_\gamma \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} \\
&= \int_\gamma \frac{1}{a + \frac{1}{2z}(z^2 + 1)} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{2z}{2az + z^2 + 1} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{dz}{(z - \alpha)(z - \beta)}
\end{aligned}
$$

このとき，$z^2 + 2az + 1 = 0$ から $z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ が得られるので，$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, $\beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ とおける．ここで，α は単位円の中，β は単位円の外にあることに注目すると．留数定理を用いると以下のような積分になる．

$$
\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}
$$

一旦，複素数の世界に持ち込むとこのように扱うこともできる．