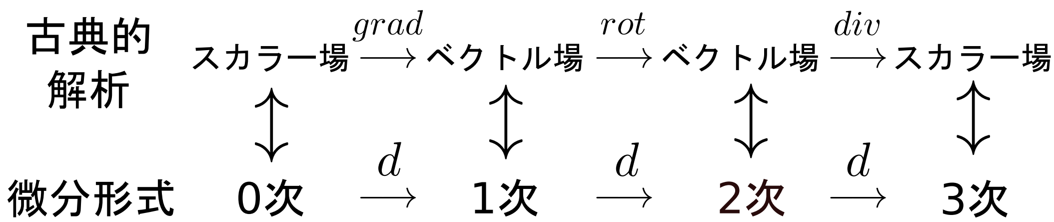
2015年度 情報数学III

情報数学III講義（第8回）

平成28年2月17日

3.5　前回の補題1

スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係は以下のように表せる．



今までは交代形式を用いて，積分定理が成り立つようにgradを定義し，Stokesの定理が成り立つようにrotを定義し，Gaussの発散定理が成り立つようにdivを定義した．今回は，特に二次の微分形式をさらに微分することについて説明する．二次の微分形式を，$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$ と表す．これをさらに微分すると，

$$d(d\phi) = d\phi \wedge dx + d\phi \wedge dy + d\phi \wedge dz$$

となる．各項を具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
d\phi \wedge dx &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}dy + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}dz\right) \wedge dx \\
&= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}dx \wedge dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}dy \wedge dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}dz \wedge dx \\
&= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}dz \wedge dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\phi \wedge dy &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}dz\right) \wedge dy \\
&= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}dy \wedge dy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}dz \wedge dy \\
&= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}dx \wedge dy - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}dy \wedge dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\phi \wedge dz &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z}dy + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}dx \wedge dz + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}dy \wedge dz + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}dz \wedge dz \\
&= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}dz \wedge dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

となり，

$$
d(d\phi) = d\phi \wedge dx + d\phi \wedge dy + d\phi \wedge dz = 0
$$

のようにまとめられる．

3.6 前回の補題 2

複素指数関数では以下の指数法則が成り立つ．

$$
e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}
$$

また $Z = x + iy$ とおき，$x = 0, y$ は実数 とすると e^{iy} をマクローリン展開によって以下の式で表せる．

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{iy^2}{2!} + \frac{iy^3}{3!} + \frac{iy^4}{4!}\cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}\cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\cdots\right)
\end{aligned}
$$

これを実部と虚部に分けると，それぞれが $\cos y, \sin y$ と等しくなるため，以下のオイラーの関係式が得られる．

$$
e^{iy} = \cos y + i \sin y
$$

ここで $y = y_1 + y_2$ と書けるなら，指数法則とオイラーの関係式から以下のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= e^{iy_1+iy_2} \\
&= e^{iy_1}e^{iy_2} \\
&= (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\
&= (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \cos y_2 \sin y_1)
\end{aligned}
$$

オイラーの関係式から $e^{i(y_1+y_2)} = \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)$ であるため，実部と虚部を比較すると以下の三角関数の加法定理が得られる．

$$
\cos(y_1 + y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 \sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2
$$

これは，複素関数の世界においては三角関数と指数関数を統一的に扱えることを示している．

3.7 前回の補題3

複素関数の微分に関するいくつかの公式を証明する．手順は実関数の場合と変わらない．$\mathbb{C}$ は線形空間で見ると $\mathbb{R}^2$ なので，$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を用いて考えてみる．

- $d(f+g) = df + dg$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f+g}{\partial x}dx + \frac{\partial f+g}{\partial y}dy \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x})dx + (\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y})dy \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \\
&= df + dg
\end{aligned}
$$

- $d(fg) = (df)g + f(dg)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial fg}{\partial x}dx + \frac{\partial fg}{\partial y}dy \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x})dx + (\frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y})dy \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)g + (\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy)f \\
&= (df)g + f(dg)
\end{aligned}
$$

3.8 コーシーの積分公式の補足

コーシーの積分公式は，点 a を中心とする半径 R の円盤の外と内に正則関数が定義されているときに，点 w における値 $f(w)$ を得ることができる．

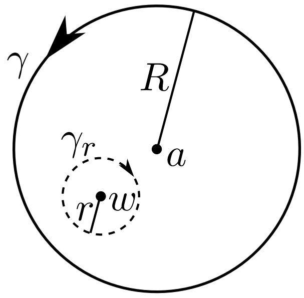
$$
f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-w}
$$

これを証明するときに，点 w が特異点になっているため，これを中心に小さな半径 r の γ_r で囲んで $\gamma \cup \gamma_r$ を考えた．
そうすると，$\gamma \cup \gamma_r$ 内部には特異点がなくなるため積分公式が使えて，

$$
\int_{\gamma \cup \gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w} = 0
$$

となる．この等式をばらすと次の関係が得られる．

$$
\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-w} = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w}
$$

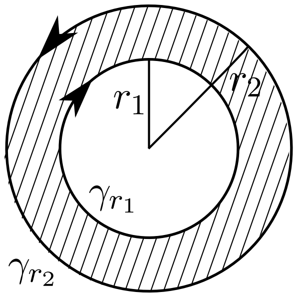


ここで，前回の講義では $r \to 0$ としたときに $f(z) \to f(a)$ と定数に近づくという荒っぽい方法を用いたが，今回はこれについて正しく導き出す.

以下を r についての関数として考える.

$$\varphi(r) \;=\; \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

ただし，このままでは $r \to 0$ にすると分母が 0 になってしまうため都合が悪い．そのため，まず r に依存しないことを証明する．$0 < r_1 < r_2$ として，$\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}$ を考える.



そうすると，そうすると，$\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}$ の内部には特異点がなくなるので以下の関係が得られる.

$$\int_{\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}} \frac{f(z)dz}{z-w} \;=\; \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)dz}{z-w} \;=\; 0$$

この関係から r に依存していないことがわかる．ただし，r を小さくしていくと分母が 0 になってしまうので，$\gamma_r : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto w + r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を用いると，$\dfrac{dz}{d\theta} = ir(\cos\theta + i\sin\theta)$ より，

$$\begin{aligned}
\varphi(r) \;&=\; \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w} \\
&=\; \int_0^{2\pi} \frac{f(w + r(\cos\theta + i\sin\theta))}{w + r(\cos\theta + i\sin\theta) - w} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&=\; i\int_0^{2\pi} f(w + r(\cos\theta + i\sin\theta)) d\theta
\end{aligned}$$

のように $\varphi(r)$ を r の連続関数として表現できる．$r \geq 0$ のときには r に依存していないので定数関数になる．特に，$r=0$ のときには $\varphi(0)=2\pi i f(w)$ となり，コーシーの積分公式が導かれる．ここで，$|z-a|>|w-a|$ なので，等比級数の公式より以下のようになる．

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)-(w-a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a} + (w-a)\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + (w-a)^2\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^3} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

このようにして，少なくとも球の内部では正則関数 f を冪級数を用いて表現できることが示せた．

3.9 定数関数に関する定理

区間 $[a,b]$ で $|f(x)| \leq M$ のように定数 M で上から抑えられるとすると，

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$$

が成り立つ．同様のことが線積分でも言えて，L を γ の長さとすると，

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$$

のような関係が成り立つ．これを用いて以下の定理を証明する．

定理

正則関数 f が複素平面全体で定義されているとき，$\max\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} < \infty$ を満たす (上に有界) ならば f は定数関数である．

証明

複素平面全体で正則関数が定義されているため R はいくらでも大きく取ることができる．これを踏まえて，冪級数で表現した f の 1 次項について考えると，

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right| &\leq \int_\gamma \frac{|f(z)|}{(z-a)^2}|dz| \\ &\leq \frac{M}{R^2}\int_\gamma |dz| \\ &\leq \frac{2\pi M}{R} \ \rightarrow \ 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

したがって，1 次以降の項の係数がすべて 0 になり，定数項のみが残るため f は定数関数である．

この定理を使うと，複素関数論を用いて代数学の基本定理を簡単に証明できる．

命題　以下の関数は必ず解を持ち 1 次式に因数分解できる．

$$f(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \;=\; 0$$

ただし，$a_n \neq 0,\ n \geq 1,\ a_i \in \mathbb{C}\ (0 \leq i \leq n)$ である．

証明

$f(x) = 0$ が解を持たないと仮定すると，$\dfrac{1}{f(z)}$ が複素平面全体で定義されることになるので，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(z)}\right| &= \left|\frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}\right| \\ &= \left|\frac{1}{z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})}\right| \;\leq\; M\end{aligned}$$

という関係が成り立つ．これは，z をどんどん大きくすると分母が定数に近づいて，平面全体でなにかある定数 M で抑えられることを表す．したがって，先ほどの定理を満たすため $\dfrac{1}{f(z)}$ が定数関数ということになる．しかし，多項式関数で割った関数が定数関数になることはあり得ない．ゆえに，$f(z)$ は必ず解を持つ．

3.10　ローラン展開

点 a を中心に半径 R の円となるような閉路を γ とする．このとき，定義されている関数が $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-a)}$ とすると点 a が特異点であるため，小さな半径 $r\ (r < R)$ の閉路 γ_r で囲って隔離した．これに対して，γ 内部の点 w における $f(w)$ はコーシーの積分公式より以下のようになる．

$$\begin{aligned}f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-w}dz\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}dz\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{w-a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right\}\end{aligned}$$

ここで，2 つの線積分はそれぞれ冪級数で表現できるので，

$$f(w) \ = \ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (w-a)^i$$

のような形で書ける．なお，α_i はそれぞれの積分の値である．これを**ローラン展開**といい，α_{-1} のことを関数 f の a における**留数**という．

ここで，微積分学の基本定理を思い出すと，正則関数 f を微分して g になったとすると，$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\int_\gamma g dz \ = \ f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

ということが言える．このような正則関数が，

$$f(w) \ = \ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (w-a)^i$$

のようにローラン展開された場合，この関数を a の周りに半径 r をとって積分してやると，$i \neq -1$ であれば $\alpha_i (w-a)^i$ という関数は原始関数を持ち，それは始点と終点が同じであるためすべて 0 となる．問題は $i = -1$ のときは原始関数がないことである．円に沿って積分したい時には，

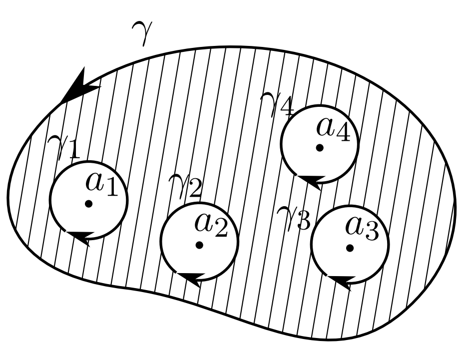
$$\int_\gamma f(z) dz \ = \ \sum_i \int_\gamma \alpha_i (z-a)^i dz$$

のように分けると，

$$\int_\gamma \alpha_{-1} \frac{dz}{z-a} \ = \ 2\alpha_{-1}\pi i$$

となり，留数を求めれば良いことがわかる．

次に，閉曲線 γ の内部に複数の特異点が存在する場合を考える．例えば，正則関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4+1}$ は $z^2 = \pm i$ となるため，4 つの特異点 a_1, a_2, a_3, a_4 が存在する．



これに対して，それぞれの点を中心とした小さな半径の閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ で囲うと次のような等式が得られる．

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} f(z)dz \ = \ 0$$

これを分解してすると以下の関係が得られる．

$$\int_{\gamma} f(z)dz \ = \ \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

ここで，$f(z)$ はローラン展開できるので，それぞれの線積分から出てくる留数の合計を求めることにより，複数の特異点が存在する場合でも簡単に計算できることがわかる．