**様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）**

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

**機関番号：** １２１０２
**研究種目：** 基盤研究(C)
**研究期間：** 2011～2013
**課題番号：** ２３５４００３９

**研究課題名（和文）** 函手的見地からのスーパー代数群の研究

**研究課題名（英文）** Study of super algebraic groups from functorial viewpoint

**研究代表者**
増岡　彰（Masuoka, Akira）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：５０２２９３６６

**交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）**　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：ホップ代数の方法を応用して、スーパー代数群、非可換torsor、ピカール・ヴェシオ理論の研究を行った。スーパー代数群に関し、(i) スーパー代数群Gをその閉スーパー部分群Hで割って得られる商層G/Hがスーパー・スキームであること（A. Zubkovとの共同研究）、(ii) ハリッシュ・チャンドラ対とスーパー代数群の間に圏同値が存在すること等、基本的な結果を得た。また非可換torsorを用いた代数の変形（P. Guillot, C. Kasselとの共同研究）、ホップ代数を用いたピカール・ヴェシオ理論の研究（柳川信との共同研究）を行った。

研究成果の概要（英文）：Applying Hopf-algebraic techniques, the PI studied super algebraic groups, non-commutative torsors and Picard-Vessiot Theory. As for super algebraic groups, there were shown basic results, such as (i) the theorem (joint with A. Zubkov) which states that the quotient sheaf G/H of a super algebraic group G by a closed super subgroup H is a super scheme, and (ii) the category equivalence between Harish-Chandra pairs and super algebraic groups. In addtion the PI studied with P. Guillot and C. Kassel, the deformation of algebras using non-commutative torsors, and investigated with M. Yanagawa, Picard-Vessiot Theory by Hopf-algebraic approach.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： ホップ代数　スーパー代数群　ホップ・ガロア拡大　ピカール・ヴェシオ理論

１．研究開始当初の背景

(1) k を基礎体とし、その標数は２でないと仮定する。ベクトル空間の圏は通常のテンソル積と自明な対称性により対称テンソル圏 Vec をなす。位数２の群 $Z_2$ により次数づけられたベクトル空間をスーパー・ベクトル空間と呼ぶ。その全体はいわゆるスーパー対称性により対称テンソル圏 SVec をなす。この Svec は偶数成分のみからなる対象全体として Vec を含む。Vec において定義された対象（例えば、代数、ホップ代数等） は、Svec において定義された対象（スーパー代数、スーパー・ホップ代数等）に一般化される。

(2) 空間を定義するのに、通常代数幾何学で採られている「幾何学的見地」、すなわち空間を環の層を伴う位相空間とする見地がある一方、空間を可換代数の圏 Alg の上で定義された(然るべき条件を満たす)函手とする「函手的見地」がある。代数群を考察するには後者の見地が都合よく、それによれば代数群とは、Alg から群の圏 Gr への表現可能函手のことである。この定義はただちにスーパー代数群に一般化できる。スーパー代数群とは、可換スーパー代数の圏 SAlg から Gr への表現可能函手のことをいう。この定義からただちに、スーパー代数群の圏と可換スーパー・ホップ代数の圏が反同型であることが従う。（しばしば必要となるため、可換スーパー・ホップ代数はすべて有限生成と仮定しておく。）

(3) スーパー代数群の重要性は、P. Deligne の有名な次の定理 (2002) に求めることができる。「k が標数ゼロの代数閉体の場合、その上の rigid な対称テンソルアーベル圏で、ある緩やかな条件を満たすものは、あるスーパー代数群上の有限次元スーパー加群圏として実現される。」この結果が発表された当時、既にスーパー代数群について多くの研究があったものの、個々の具体的対象の表現に関する結果が殆どで、一般論は十分整備されておらず、その点 1970 年代の Kostant, Koszul に始まるスーパー・リー群論とは大きな隔たりがあった。例えば、スーパー代数群の閉正規スーパー部分群と商スーパー群の間の１対１対応すら証明されていなかった。そこで研究代表者は 2004 年頃からスーパー代数群の研究をはじめ、まずいま述べた１対１対応に代表されるごく基礎的な定理を証明した。

２．研究の目的

(1) 本研究の目的は、研究代表者がこれまで行ってきた、「ホップ代数・量子群の研究」、「微分・差分統一 Picard-Vessiot 理論」の研究成果に基づき、上記の函手的見地から（正標数の場合を含む）スーパー代数群の基礎理論を確立し、その研究成果を応用して Picard-Vessiot 理論のスーパー化等を行うことである。

(2) より具体的には次の３つから成る。

(a)「簡約」、「単連結」といった、スーパー代数群に対して確立したとはまだ言い難い概念を正しく定式化し、それらの性質をもつスーパー代数群特徴づけること。さらには、全ての簡約スーパー代数群を分類すること。

(b) いくつかのスーパー代数群に対して個々に行われてきたモジュラー表現の研究を、より広いクラスのスーパー代数群に対し包括的に展開する。

(c) 天野勝利と研究代表者による共著 [“Picard-Vessiot extensions of artinian simple module algebras”, J. Algebra 285 (2005), 743--767] で得られた微分・差分統一 Picard-Vessiot 理論をスーパーのコンテクストに一般化すること。

３．研究の方法

(a) ホップ代数・量子群のテクニックの応用: 前述のとおり、スーパー代数群の圏と可換スーパー・ホップ代数の圏の間に自明な反同型が存在するため、この方法が可能になる。特に、可換スーパー・ホップ代数を、その双対でよりわかりやすい余可換スーパー・ホップ代数を通して研究する方法は有効である。

(b) リダクション: スーパー代数群 G に対し、その定義域 SAlg を Alg に制限することにより、通常の代数群 $G_{ev}$ が得られる。G と $G_{ev}$ の関係を明らかにした上、代数群 $G_{ev}$ に関する既知の結果から G の情報を引き出す。

(c) 比較: スーパー代数群の研究、より広くスーパー幾何学においても、函手的見地と並んで幾何学的見地が従来から存在した。これは可換スーパー代数の層を伴う位相空間を考察するものである。双方の見地がスーパー・スキームのレベルで同等であること(比較定理) を示した上で、スーパー代数群やその商スーパー空間の幾何学的性質を、対応する幾何学的スーパー・スキームの性質から導く。

４．研究成果

(1) A. Zubkov との共著論文 Quotient sheaves of algebraic supergroups are superschemes の成果を報告する。よく知られているように、(a) 幾何学的見地と函手的見地の双方でそれぞれにスキームの概念が定義されるが、それらは互いに同値である (比較定理)。より正確にはそれぞれに定義されるスキームの圏が互いに同値である。

(b) 代数群 G をその閉部分群 H で割って得られる商層 G/H はスキームである。これら (a), (b) をスーパーのコンテクトに一般化したのがこの共著論文である。先に「(b) のスーパー化が成立するか」という問題が J. Brundan によって提起されていた。この問題が肯定的に解かれたことで、Brundan がかつて層係数のコホモロジーを定義すると

きにおいていた仮定が、実は必然的に成り立っていることが明らかになった。

(2) P. Guillot, C. Kassel との共著論文 Twisting algebras using non-commutative tosors: explicit computations の成果を報告する。代数幾何学においてよく知られた、次の変形を思い出そう。G を代数群とし、X を G が右から作用する torsor とする。G が左から作用する代数多様体 X に対し、これを変形して新しい代数多様体 G\T×X が構成される (G の元 g は T×X の元 (t,x) に、$(tg^{-1},gx)$ により作用するものとする)。例えば、Severi-Brauer 多様体は $G = PGL_n$, $X = P^n$ の場合にこの変形により与えられる。この構成を非可換幾何学の枠組みで定式化したのがこの論文である。G にはホップ代数 H が、T には H 上の２コサイクル σ が、X には左 H-余加群代数 A が対応する。A の σ による変形の、生成系と関係式による具体的表示法を示し、多くの具体例を与えた。それには量子アフィン空間、量子トーラスの新しい構成法も含まれている。

(3) 単著論文 Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field の成果を報告する。

B. Kostant は、(a) スーパー・リー群に関して Harish-Chandra 対の概念を定義し、(b) Harish-Chandra 対全体とスーパー・リー群全体の間に圏同値が存在することを証明した。ホップ代数の方法を用いてこれらを、スーパー代数群にまで拡張したのがこの論文である。それは単に Kostant の方法を真似たものではない。スーパー代数群に対して Harish-Chandra 対の概念を定義するのに、まずスーパー余可換ホップ代数に対し双対 Harish-Chandra 対という新しい概念を定義し、それを自然に双対化した。また、双対 Harish-Chandra 対全体と余可換スーパー・ホップ代数全体の間に圏同値が存在することを証明した。Harish-Chandra 対とスーパー代数群の間の圏同値の証明は、完備位相スーパー・ホップ代数を用いることで概念的かつ簡明になされている。

続いて最後の圏同値を応用して、(a) 単連結、(b) ベキ単、(c) (正標数における) 線型簡約、といった性質をもつスーパー代数群を特徴付けた。結果は次のとおり。(a) 単連結なスーパー代数群 G は、ゼロ標数の場合そのスーパー・リー代数 Lie(G) の性質、正標数の場合そのスーパー超代数 hy(G) の性質によって、それぞれ特徴付けられる（これらはそれぞれ G. Hochschild, 竹内光弘による、単連結代数群に関する結果の直接の一般化になっている）。(b)スーパー代数群 G がベキ単であるためには、付随する代数群 $G_{ev}$ がベキ単であることが必要十分である。
(c)標数ゼロの代数閉体上の線型簡約スーパー代数群は R. Weissauer [“Semisimple algebraic tensor categories”, arXiv:0909.1793] によって分類された。その結果によると、線型簡約スーパー代数群のうち、代数群でないものはかなり限られている。正標数においてはより限定的であって、正標数の体上、線型簡約代数群は通常の代数群に限る。

なお、(1)と本項の研究成果を含む、研究代表者と共同研究者たちによるスーパー代数群に関する結果を、アメリカ数学会、カナダ数学会、日本数学会において口頭発表した。日本数学会における発表の報告 Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups は「第５８回代数学シンポジウム報告集」に収められ、arXiv にも投稿された (arXiv:1311.1261)。これには上記 Weissauer の分類結果が別の定式化で与えられている。

(4) 柳川信との共著論文 $\times_R$-Bialgebras associated with iterative q-difference rings の成果を報告する。C. Hardouin は彼女の論文［“Iterative q-difference Galois theory”, J. Reine Angrew. Math. 644 (2010), 101—144] において、反復 q-差分作用素の Galois 理論を展開し、同時にその理論がもっと一般的な枠組みに吸収されないか、という問題を提起した。それに肯定的に答えたのがこの共著論文で、天野勝利と研究代表者の共著論文 [“Picard-Vessiot extensions of artinian simple module algebras, J. Algebra 285 (2005), 743--767] の枠組みに彼女の理論が吸収されることを示したものである。一見、非余可換な作用に見える反復 q-差分作用素が実は余可換な作用であることを、かつて M. Sweedler が考案した$\times_R$-双代数の概念を用い、余接合積に伴う２-コサイクルの消滅を証明することで明らかにした。

(5) N. Andruskiewitsch らとの Lifting via cocycle deformation の成果を報告する。A をホップ代数で、その余根基 H が部分ホップ代数であるようなものとする。例えば量子展開環を重要な例として含む点状ホップ代数はこの仮定を満たしている。A をその余根基フィルターによって次数化すると、次数つきホップ代数 gr A が得られる。この gr A は、A に比べはるかに捉えやすく、多くの場合 Nichols 代数 B(V) のボゾン化 B(V)#H の形をしている。いま、B(V)#H から A がどう復元できるか、という問題を考える。多くの場合、A は B(V)#H の２コサイクル変形として与えられる。B(V)#H の２コサイクル変形をすべて求める組織的方法について論じ、その方法をいくつかの具体例に対して実践したのがこの論文である。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①増岡 彰, A. Zubkov, Quotient sheaves of algebraic supergroups are superschemes, J. Algebra 348(2011), 135--170. 査読あり.
DOI 10.1016/j.jalgebra.2011.08.038

②P. Guillot, C. Kassel, 増岡 彰, Twisting algebras using non-commutative tosors: explicit computations, Math. Zeit., 271 (2012), 789--818. 査読あり.
10.1007/s00209-011-0891-x

③増岡 彰, Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field, Transform. Groups 17 (2012), 1085--1121. 査読あり.
DOI 10.1007/s00031-012-9203-8

④増岡 彰, 柳川 信, $\times_R$-Bialgebras associated with iterative q-difference rings, Internat. J. Math. 24 (2013), 1350030, 27 pp. 査読あり.

⑤N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. Garcia Iglesias, 増岡 彰, C. Vay, Lifting via cocycle deformation, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 684–703. 査読あり.
DOI 10.1016/j.jpaa.2013.08.008

〔学会発表〕（計４件）

①増岡 彰, Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups, 日本数学会, 代数学シンポジウム, 広島大学（広島市）, 2013 年８月 26 日.

②増岡 彰, Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups}, カナダ数学会, サマー・ミーティング, ダルハイジー大学（カナダ）, 2013 年６月６日.

③増岡 彰, Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups, アメリカ数学会, 地域会議, ボストンカレッジ(アメリカ合衆国), 2013 年４月７日.

④増岡 彰, Mini-course on Hopf algebras ---Hopf crossed products, Conference on Ring Theory, 中山大学（中国）, 2012 年６月 24--30 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
増岡 彰（MASUOKA, Akira）
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：50229366

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：