



2015年度 微積分

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2015
URL	http://hdl.handle.net/2241/00124288

微積分第24回講義ノート

留数定理

Coulombの法則 \Rightarrow Gaussの法則
電場(ベクトル場)

ρ $\text{div } \mathbf{f} = 0$

Gaussの発散定理

重ね合せの原理

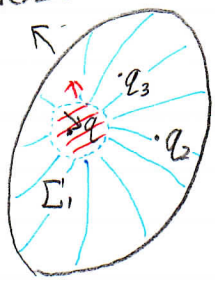
閉曲面 Σ で囲まれた領域 Ω

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{f}) dV = 0$$

面積分
0

体積分 $\Sigma \cup \Sigma_1$

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0 \rightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$



$4\pi k q$

$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k$ (内部にある電場の和)

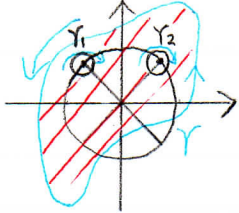


\mathbf{f} : 解析的



$\int_{\gamma} \mathbf{f} d\mathbf{r} = 0$

$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$



$\int_{\gamma} f dz$

$\int_{\gamma} r_1 r_2 f dz = 0$

$\int_{\gamma} f dz - \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz = 0$

$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$

特異点

Laurent展開 級数

$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (z-a)^i$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

基本定理 $F' = f$ 原始関数

$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$



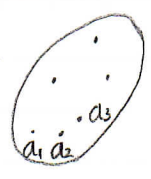
$i \neq -1$

γ が閉曲線

$\int_{\gamma} f dz = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \int_{\gamma} (z-a)^i dz$ $z-a, \frac{(z-a)^2}{2}$

$$\int_{\gamma} (z-a)^{-1} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

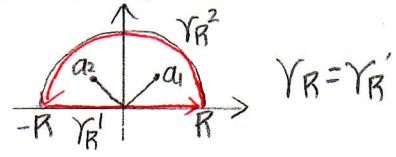
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f; a_i)$$



Res (f; a)
f(a)における留数

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; a_1) + \text{Res}(f; a_2) + \text{Res}(f; a_3))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; a_1) + \text{Res}(f; a_2)) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \quad \begin{matrix} R \text{ が十分大きい} \\ R > 1 \end{matrix}$$

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_{\gamma_R'} f(z) dz + \int_{\gamma_R''} f(z) dz$$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

$$|g(x)| \leq M$$



$$\left| \int_{\gamma} g(z) dz \right| \leq M (\gamma \text{ の長さ})$$

$$|g(z)| \leq M \quad \gamma_R^2: \theta \in [0, \pi] \rightarrow Re^{i\theta}$$

$$\left(\int_{\gamma_R''} f(z) dz \right)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

$$|f(Re^{i\theta})| = \left| \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} \right| = \left| \frac{R^2}{R^4} \frac{e^{2i\theta}}{\frac{1}{R^4} + e^{4i\theta}} \right| \approx \frac{1}{R} \quad R \rightarrow \infty$$

Report 次を示せ.

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

(a>0) 重解
g(z)
g'(z) a_i

$$\text{Res}(f; a) \quad w_1, w_2, w_3, w_4 \quad \frac{z^2}{z^4+1} = \frac{z^2}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}$$

$$x^2+a^2 = (x+ai)(x-ai)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2} = \text{Res}(f; w_1)$$

$$\text{Res}(f; -ai) \quad g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z+ai)^i \quad \frac{g(z)}{(z-w_i)^2}$$

$$\frac{g(z)}{z-w_i} \quad \frac{d_0}{z-w_i} \quad \frac{\sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-w_i)^i}{z-w_i}$$