2015年度 微積分

著者	西村 泰一
著者別名	Nishimura Hirokazu
発行年	2015
URL	http://hdl.handle.net/2241/00124288

2015年10月19日(月)

微積分第17回講義ノート

微積分学の基本定理 ← 微分が成り立つように決めてある

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \xrightarrow{\text{微分}} f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$a,b\in\mathbb{R}, \int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$

無限小のlevelで成り立つ…十分

$d\in D,\ \underline{\int_a^{a+d} f'(x)dx} = \boxed{f(a+d)-f(a)}$

$\int_a^{a+d} f'(x)dx = f'(a)d$, $f(a+d)-f(a) = \alpha d$

$\int_a^{a+d} g(x)dx = g(a)d$

Kock-Lawvereの公理

$(\exists!\alpha\in\mathbb{R})$

$$\text{スカラー場} \xrightarrow[\text{grad(ient)}]{\text{勾配}} \text{ベクトル場} \xrightarrow[\text{rot(ation)}]{\text{回転}} \text{ベクトル場} \xrightarrow[\text{div(ergence)}]{\text{発散}} \text{スカラー場}$$

$\Updownarrow$ 0次の微分形式　$\Updownarrow$ 1次の微分形式　$\Updownarrow$ 2次の微分形式　$\Updownarrow$ 3次の微分形式

$\mathbf{f} = \underline{f_1\mathbf{e}_1+f_2\mathbf{e}_2+f_3\mathbf{e}_3}$

$\Updownarrow$

$\underline{f_1dx+f_2dy+f_3dz}$

$\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$dx:\mathbf{a}\mapsto a_1,\ dy:\mathbf{a}\mapsto a_2,\ dz:\mathbf{a}\mapsto a_3$

$(f_1(x)dx+f_2(x)dy+f_3(x)dz)(\mathbf{a})$

$= f_1(x)a_1+f_2(x)a_2+f_3(x)a_3 = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{a}$

$f_1\mathbf{e}_1+f_2\mathbf{e}_2+f_3\mathbf{e}_3$

$\Updownarrow$

$f_1dy\wedge dz+f_2dz\wedge dx+f_3dx\wedge dy$

$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{l} dy\wedge dz = \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} \\ dz\wedge dx = \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} \\ dx\wedge dy = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{array}\right) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f_1(x)\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} + f_2(x)\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} + f_3(x)\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$

$= \mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

スカラー場 $\overset{\text{grad}}{\Longrightarrow}$ ベクトル場　微分演算　$\gamma : [a, b] \xrightarrow{\text{曲線}} \mathbb{R}^3$

φ

0次の微分形式　　1次の微分形式

$$\boxed{\int_\gamma \underbrace{(\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot d\mathbb{r}}_{d\varphi\ \text{1次の微分形式}} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))}$$

無限小のlevelで成り立つように決めればいい

$$x \xrightarrow{\mathbb{a}d} x + \mathbb{a}d$$

$$\int_\gamma (\mathrm{grad}\,\varphi)\, d\mathbb{r} = \frac{\varphi(x + \mathbb{a}d) - \varphi(x)}{\alpha d}$$

$\varphi'(x)(\mathbb{a})$

φ': 1次の微分形式

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

Kock-Lawvereの公理

$\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$　$x \in \mathbb{R}^3$

$\varphi\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3$

$\underline{\varphi'(x)(\mathbb{a})}\, d$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ベクトル場 $\overset{\text{rot}}{\Longrightarrow}$ ベクトル場

$\updownarrow$　　　　$\updownarrow$

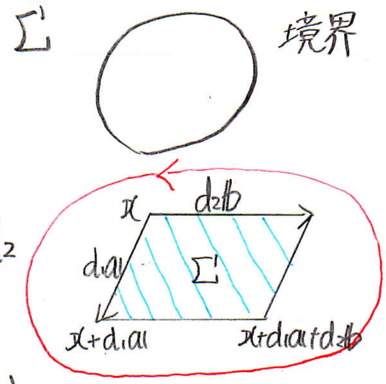
1次の微分形式 $\overset{d}{\Longrightarrow}$ 2次の微分形式

$$\underset{\mathbb{R}^3}{\mathbb{a}} \longmapsto \mathbb{f}(x)\cdot \underset{\mathbb{R}}{\mathbb{a}}$$

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbb{f}\, d\mathbb{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbb{f})\cdot d\mathbb{S}$$

線積分　　　　面積分

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega$$



$d_1 d_2$

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \longmapsto$

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$\updownarrow$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$d\omega(x)$

$$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \longmapsto d\omega(x)(\mathbb{a}, \mathbb{b})\, d_1 d_2$$

2次の交代形式