2015年度 微積分

No. 1
Date 2015年10月5日(月)

微積分第15回講義ノート

ベクトル解析　空間 $\mathbb{R}^3$

ベクトル場　　力の場，流れの場

スカラー場　　温度，湿度

$f_1(x)\mathbb{e}_1+f_2(x)\mathbb{e}_2+f_3(x)\mathbb{e}_3$

$\boxed{f_i:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}\ (i=1,2,3)}$

同一視

$dx\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longrightarrow x$

$dy\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longrightarrow y$　　$f_1dx+f_2dy+f_3dz$

$dz\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longrightarrow z$

platonic

pragmatic (近代科学)

測定

$d\in D$

$f(x)\ \ x$

da

$x\mathbb{e}_1+y\mathbb{e}_2+z\mathbb{e}_3$

$\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x)\cdot d\mathbb{a}=df(x)\cdot\mathbb{a}$

$\underset{\mathbb{R}^3}{\mathbb{a}}\longmapsto \underset{\mathbb{R}}{f(x)\cdot\mathbb{a}}$　線形写像

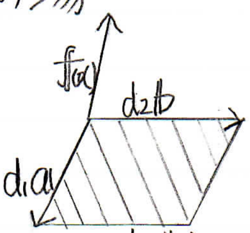
1次の交代形式

1次の微分形式

流れの場　　$d_1,d_2\in D$　　2次の微分形式 (2次の交代形式)の全体　線形空間　3次元

$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$\mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$



平行六面体

体積

$(\mathbb{a},\mathbb{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longmapsto f(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\in\mathbb{R}$

$f(x)\underset{\text{内積}}{\cdot}(d_1\mathbb{a}\underset{\text{ベクトル積}}{\times}d_2\mathbb{b})$

二重線形

$=d_1d_2f(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$　　交代性

$(\mathbb{a},\mathbb{b})\longmapsto\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}$　$dy\wedge dz$

$\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}$　$dz\wedge dx$

$\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$　$dx\wedge dy$

$f_1(x)dy\wedge dz+f_2(x)dz\wedge dx+f_3(x)dx\wedge dy$

$f_1(x)\mathbb{e}_1+f_2(x)\mathbb{e}_2+f_3(x)\mathbb{e}_3$　一次の微分形式

$$f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=f_1(x)\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}+f_2(x)\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}+f_3(x)\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$$

$$=f_1(x)(dy\wedge dz)+f_2(x)(dz\wedge dx)+f_3(x)(dx\wedge dy)$$

線積分　Stokesの定理
面積分
微積分学の基本定理（高校）

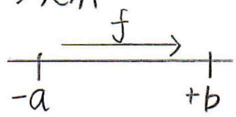
$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　$F = f'$

$[a, b]$ 区間

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

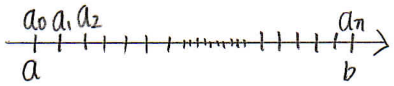
定積分

境界



$F(b) - F(a)$

微分　　　細分



$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx}$$

$\vdots$

$F(a_{i+2}) - F(a_{i+1})$

$F(a_{i+1}) - F(a_i)$

$F(a_i) - F(a_{i-1})$

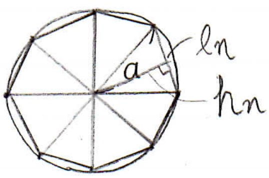
$\vdots$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{a_i}^{a_i+d_i} f(x)\,dx = F(a_i+d_i) - F(a_i)$$

微分の定義

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

アルキメデスの取り尽くし法



正n角形の面積：$n \frac{1}{2} l_n h_n = \frac{1}{2} h_n (n l_n)$

$\lim_{n \to \infty} h_n = a$, $\lim_{n \to \infty} n l_n = 2\pi$ より

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} h_n (n l_n) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$ ← 円の面積