日本ファジィ学会誌 Vol.10, No.3, pp.445-450 (1998)

ワンポイント講座

証拠理論†

稲垣 敏之* 伊藤 誠*

1．はじめに

あることがらが成立する「度合」を表そうとするとき，真先に念頭に浮かぶのは確率を用いることであろう．しかし，確率的表現は必ずしも万能ではなく，不自然さをもたらすこともある．例えば，ある殺人事件の容疑者としてＳ氏が逮捕されたとしよう．Ｓ氏の衣服から，被害者の血液型と同型のものが検出されたという単一の証拠ｅをもってＳ氏を犯人と断定することはできない．そこで，「Ｓ氏が犯人である確率は0.6である」との主張を行ったとしよう．すると，Ｓ氏は犯人か，そうでないかのいずれであるから，上の主張から「Ｓ氏が犯人でない確率は0.4である」との主張が導かれる．しかし，「血液型の一致」を示す証拠ｅが容疑者の無実を支持するものとは考えにくい．もちろん確率論に基づく議論でも，上のような不自然さを回避する工夫は可能である．しかし，ある命題を支持する「情報や証拠が不十分であること」と，「命題を否定すること」を自然な形で区別できるものとして証拠理論(Dempster-Shafer 理論)[10]があることを知っておくことは有用であろう．本稿ではその証拠理論の基礎を概説する．

† Theory of Evidence
Toshiyuki INAGAKI and Makoto ITOH
＊ 筑波大学電子・情報工学系 先端学際領域研究センター
Institute of Information Sciences and Electronics, the Center for TARA, University of Tsukuba

2．証拠理論

2.1 確信の度合

命題の有限集合$\{x_1,x_2,\cdots,\ x_n\}$がつぎの２つの性質を持つとき，Xを識別空間(frame of discernment：fod)と呼び，x_iを基本命題と呼ぶ．

(i) $x_1,\cdots,x_n$は互いに排他的である
(ii) $x_1,\cdots,x_n$のうち，ひとつだけが真であり，残りの$(n-1)$個はすべて偽である

fod Xの部分集合は命題として解釈する．例えば，$\{x_j,\ x_k\}\in\ 2^X$ (2^XはXのべき集合)は，x_jとx_kの論理和$x_j \vee x_k$と同一視する．

例１ 航空機のコクピットにおいて，電波航法機器に異常が発生したが，しばらくすると正常動作に戻った．客室乗務員に問い合わせたところ，携帯電話で短い通話をした後，数分間ビデオカメラを使用していた乗客がいたという．マスコミで話題になるように，携帯電子機器が航空機を狂わせるのだろうか．

電波航法機器の異常の原因は，「携帯電話(x_1)」か，「ビデオカメラ(x_2)」か，あるいは「電波航法機器自身の間欠故障(x_3)」のうちのいずれか一つであるだろうと考えるとき，$X=\{x_1,x_2,x_3\}$となる．ここで，例えば$\{x_1,x_2\}$は，「携帯電話あるいはビデオカメラのいずれであるか特定はできないが，携帯電子機器が電波航法機器に影響を及ぼした」という命題を表す．また，fod X自身は，「３つの原因のうち，どれが真の原因であるか全く不明である」という命題を表す．

証拠理論ではそれぞれの命題への確信の度合を表現するための関数 $m:2^X\to[0,1]$ を，次の公理を満たすように定義する．

公理

$$m(A)\geq 0,\ \forall A\in 2^X \tag{1}$$
$$m(\phi)=0 \tag{2}$$
$$\sum_{A\in 2^X} m(A)=1 \tag{3}$$

m は基本確率割当(basic probability assignment)と呼ばれることがあるが，「確率」ということばが入っているものの，確率測度や確率密度としての性質は持っていない．基本確率割当という用語はその意味で不用意なものであり，本稿では m を信念割当関数(basic belief mass function)と呼ぶ．なお，$m(A)>0$ となる $A\in 2^X$ は焦点要素(focal element)と呼ばれる．

例 2　例 1 に対して

$$m(x_1)=0.2 \qquad m(x_2)=0.4$$
$$m(x_1,x_2)=0.1 \quad m(X)=0.3$$

信念割当関数 m は集合関数であるので，正確には $m(\{x_1\})$，$m(\{x_1,x_2\})$ などと書く必要があるが，本稿では誤解の生じない範囲で記述を簡略化して $m(x_1)$ や $m(x_1,x_2)$ などと書くことにする．

m の公理は確率測度のそれと類似しているが全く別のものである．例 2 で与えた m は公理を満たしているが，加法性や単調性が成立していないことを読者は直ちに見ることができるであろう．

例 2 において，公理(3)から $m(x_3)=0$ を得るが，これは，電波航法機器の異常が，それ自身の間欠故障(x_3)によるものであることを明示的に支持する証拠がないことを示しているにすぎず，「電波航法機器の間欠故障は発生しなかった(x_3の否定)」ことを主張しているわけではない．すなわち，証拠理論では，「命題の否定」と，「命題を肯定するための情報の欠落」を明確に区別することができる．

$m(A)$の集合$\{m(A):A\in 2^X\}$を信念構造(belief structure)という．代表的なものとしてはつぎのようなものがある．

1．Bayes 的信念構造：
$X=\{x_1,x_2,x_3\}$のとき，

$$m(x_1)=0.2,\ m(x_2)=0.4,\ m(x_3)=0.4$$

のように，すべての焦点要素が単集合(singleton)であるもの．

2．空疎な(vacuous)信念構造：

$$m(X)=1$$

この信念構造は，X を構成する命題のうちどの命題が真であるかまったくわからないことを表す．

3．単純支持関数(simple support function)：

$$m(A)=s,\ m(X)=1-s\ (s\in(0,1])$$

これは，命題 A に関してはある程度支持を明確にできるが，それ以外の特定の命題に関しては明確に支持を表明できないことを表す．

4．相補的(complementary)信念構造：

$$m(A)+m(\bar{A})=1$$

ただし，$\bar{A}$は A の補集合．なお，相補的信念構造は必ずしも Bayes 的でないことに注意されたい．

例 3　図 1 に示す 2 つのサブシステムの出力に相違が見られる．どちらかのサブシステムが故障したらしい．サブシステム A が故障した(x_A)のか，サブシステム B が故障した(x_B)のかに興味があるならば，この状況は相補的信念構造

$$m(x_A)+m(x_B)=1$$

で表現できる．しかし，サブシステムの構成要素にまで関心を払うなら，

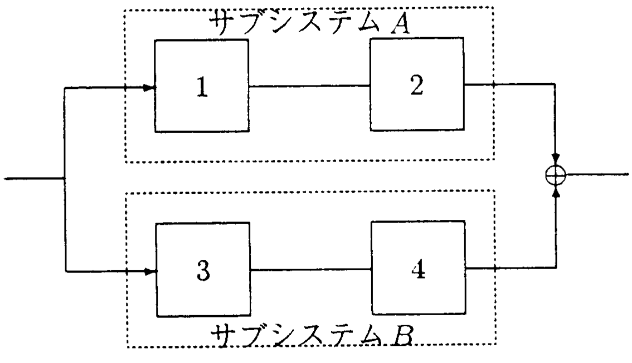

図 1　4 要素から成る 2 重系

$$m(x_1,x_2)+m(x_3,x_4)=1$$

と表現すべきであり，これはもはやBayes的ではない．

2.2 確信度の上限・下限

命題の真偽に対する確信度を，上限と下限の幅を与えて表現したいこともある．証拠理論では，命題 A に対する確信の度合のとりうる幅を，区間 $[\mathrm{Bel}(A),\mathrm{Pl}(A)]$ で表現する．ここで，$\mathrm{Bel}(A)$，$\mathrm{Pl}(A)$ は，各々ビリーフ関数，プローザビリティ関数と呼ばれ，次式で定義される．

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{C\subset A} m(C) \tag{4}$$

$$\mathrm{Pl}(A)=\sum_{C\cap A\neq\phi} m(C) \tag{5}$$

Bel と Pl との間には次式が成立する．

$$\mathrm{Bel}(A)=1-\mathrm{Pl}(\bar{A}) \tag{6}$$

例 4　$X=\{x_1,x_2,x_3\}$ に対して，信念構造がつぎのように与えられたとする．

$$m(x_1)=0.2,\quad m(x_1,x_2)=0.3,$$
$$m(x_2,x_3)=0.5$$

このとき，

$$\mathrm{Bel}(x_1)=0.2,\quad \mathrm{Pl}(x_1)=0.5$$
$$\mathrm{Bel}(x_1,x_2)=0.5,\quad \mathrm{Pl}(x_1,x_2)=1.0$$

などが得られる．

なお，m と Bel の間には，

$$m(A)=\sum_{B\subset A}(-1)^{|A-B|}\,\mathrm{Bel}(B) \tag{7}$$

なる一対一対応がある．したがって，まず Bel を公理的に定め，それを用いて m を導出する方式で証拠理論を構成することも可能である[10]．

2.3 情報統合

複数の独立な知識源から得られる信念構造を結合することを「情報統合」という．$\{m_1(F):F\in 2^X\}$，$\{m_2(G):G\in 2^X\}$ を統合して m を得ることを $m=m_1\oplus m_2$ と書く．

情報統合はつぎの二つのステップからなる．

ステップ 1：命題の論理積とその評価

関数 q を次式で定義する．

$$q(E)=\sum_{F\cap G=E} m_1(F)\,m_2(G) \tag{8}$$

この関数は，信念割当関数を導出するための予備的なものであり，予備割当関数(ground assignment fucntion)と呼ぶ．二つの情報 m_1,m_2 がそれぞれ支持する命題の論理積に対し，確信度を割当てる役割をはたす．

例 5　$X=\{A,\bar{A}\}$ のとき，つぎの信念構造が与えられたとしよう．

$$m_1(A)=0.6,\quad m_1(X)=0.4$$
$$m_2(A)=0.3,\quad m_2(\bar{A})=0.2,\quad m_2(X)=0.5$$

このとき，q は次のように定まる(図 2)．

$$q(A)=0.6,\quad q(\bar{A})=0.08$$
$$q(X)=0.2,\quad q(\phi)=0.12$$

m_2 \ m_1	A 0.6	X 0.4
A 0.3	$A=A\cap A$ 0.18	$A=A\cap X$ 0.12
$\bar{A}$ 0.2	$\phi=\bar{A}\cap A$ 0.12	$\bar{A}=\bar{A}\cap X$ 0.08
X 0.5	$A=X\cap A$ 0.30	$X=X\cap X$ 0.20

図 2　予備割当関数の生成

ステップ 2：予備割当から信念割当への変換

$q(\phi)$ は，二つの情報 m_1，m_2 間にどれくらいの矛盾があるかの度合を示す．一般には $q(\phi)\neq 0$ であるため，q 自身が信念割当関数であるとはかぎらない．そこで，予備割当関数 q を信念割当関数 m へ変換する必要がある．よく知られている基本的な変換手法は，つぎの Dempster の規則[10]である．

$$m(C)=\frac{q(C)}{1-q(\phi)},\quad C\neq\phi \tag{9}$$

すなわち，q を $1-q(\phi)$ で正規化することにより，ϕ に割当てられた $q(\phi)$ を ϕ 以外の焦点要素へ比例配分しようとするものである．換言すれば，Dempsterの規則は，二つの情報 m_1，m_2がたとえ矛盾する点を含んでいても，あたかも全く矛盾がなかったかのように見なすものといえる．

Dempsterの規則によると，例5の統合結果は次のようになる．

$$m(A)=0.68, m(\bar{A})=0.09, m(X)=0.23$$

この統合則では，結合律($m_1\oplus(m_2\oplus m_3)=(m_1\oplus m_2)\oplus m_3$)・交換律を満たし，単位元が存在するが，べき等律は成立しない[11]．

Dempsterの統合規則では，$q(\phi)$が1に近い場合，すなわち二つの情報がひどく矛盾する場合は，直観にそぐわない結果をもたらすことがある．

例6　$X=\{x_1,x_2,x_3\}$とする．このとき，

$$m_1(x_1)=0.90, m_1(x_2)=0.10, m_1(x_3)=0.0$$
$$m_2(x_1)=0.0, m_2(x_2)=0.10, m_2(x_3)=0.90$$

をDempsterの規則で統合すると，$m(x_2)=1$を得る．しかし，x_2は，m_1あるいはm_2のいずれでもほとんど支持されていなかった命題である．

例7　上の例の値を少し変えて，

$$m_1(x_1)=0.89, m_1(x_2)=0.10, m_1(x_3)=0.01$$
$$m_2(x_1)=0.01, m_2(x_2)=0.10, m_2(x_3)=0.89$$

をDempsterの規則を用いて統合すると，

$$m(x_1)=0.32,\quad m(x_2)=0.36,\quad m(x_3)=0.32$$

を得る．これは例6の結果と比べて，大きく異なるものとなっている．すなわち，Dempsterの統合規則は，二つの情報の矛盾の度合が大きな時には，確信度の摂動に対して大きな影響を受ける．

Yagerは，例6，7で見た問題点を解消すべく，次の規則を提案している[12]．

$$\begin{cases} m(C)=q(C),\quad C\neq\phi, X \\ m(X)=q(X)+q(\phi) \end{cases} \tag{10}$$

Yagerの規則では，独立な知識源から得られた情報間に矛盾が生じたとき，それを「矛盾を解消する知識の欠落」とみなし，$q(\phi)$を X に割当てる．

Yagerの規則の性質には，(1) $q(\phi)=0$のときはDemspterの規則に一致すること，(2) $q(\phi)=1$のときの統合結果は空疎な信念構造を与えること，(3) 一般には結合律が成立しないことなどの性質があることは，読者自ら確認されたい．

では，情報統合規則は，上の二つ以外にも考えられるのだろうか．答えは肯定的である．Dempsterの統合規則とYagerの統合規則は外見は異なるが，いずれも ϕ あるいは X でない C,D に対し，

$$\frac{m(C)}{m(D)}=\frac{q(C)}{q(D)} \tag{11}$$

を満たすことに注意すると，この性質を持つ統合規則は非可算無限個存在し，次式で表現されることがわかる[4][5]．

$$\begin{cases} m(C)=\{1+kq(\phi)\}q(C),\quad C\neq X,\phi \\ m(X)=1-\sum_{C\neq X,\phi} m(C) \end{cases} \tag{12}$$

$$0\leq k\leq\frac{1}{1-q(\phi)-q(X)} \tag{13}$$

(12)式において，kの値を一つ固定すると，それに応じて統合規則が一つ定まる．例えば，$k=0$はYagerの規則，$k=\{1-q(\phi)\}^{-1}$はDempsterの規則を与える．

複数の情報統合規則が存在することがわかると，いずれの規則を選択すべきか，すなわち情報処理の最適化が問題となる．しかし，「情報処理」と「意思決定」は独立に最適化できるとは限らない．

たとえば，二つの情報 m_1，m_2が与えられたとき，これらを統合すべき規則を定めて((12)式のパラメータ k の値を一つ固定することに対応する) m を得，これに基づいて意思決定を行おうとするとき，k の選定に意思決定過程があらかじめ考慮されていないならば，最悪の結果を導くことがある．つぎの例を見てみよう．

例8　1986年のスペースシャトル・チャレンジャーの打上げを考えよう．$X=\{$打上げは安全(S)，打上は危険$(U)\}$とするとき，さまざまな情報に基づいた結果，信念構造$\{m(S), m(U), m(X)\}$が得られる．このとき，$m(X)$をどのように意思決

定に反映させるかが問題となる．たとえば，エンジニア達は「設計の想定外の過酷な気象条件のもとでは安全性を保証できないから，打ち上げを延期すべきである」と主張した．これに対してNASA当局は，「危険であることが証明されたわけではないのだから，打ち上げは延期すべきではない」と考えた．これは，図3に示すようなエンジニアによる安全証明(Safety-Preservation：SP)型の意思決定方策と，NASA当局による危険証明(Fault-Warning：FW)型の方策の対立としてとらえることができる[4]．これら2種類の決定方策は，X上の信念構造mから$\mathbf{A}=\{$打上(GO)，打上延期$(NO\ GO)\}$上の信念構造m^*への写像と考えられる．FW,SP方策のもとでの決定に関する信念構造m^*_{fw}, m^*_{sp}は，それぞれ次のように得られる．

$$\begin{aligned} m^*_{fw}(GO) &= m(S)+m(X) = \mathrm{Pl}(S)\\ m^*_{fw}(NO\ GO) &= m(U) = \mathrm{Bel}(U)\\ m^*_{sp}(GO) &= m(S) = \mathrm{Bel}(S)\\ m^*_{sp}(NO\ GO) &= m(U)+m(X) = \mathrm{Pl}(U) \end{aligned}$$

ここで，$m^*_{fw}(GO)$, $m^*_{sp}(GO)$が情報統合のパラメータkに対して，それぞれ単調減少，単調増加になる(このことは読者自ら確認されたい)．すなわち，FW方策のもとではYagerの規則$(k=0)$を用いると$m^*_{fw}(GO)$が最も大きくなり，一見，情報間の矛盾を自らの知識の欠落としてとらえる「謙虚」な規則であるにもかかわらず，不確実性のもとで打上げを強行する度合が最も強いものとなる．一方，SP方策のもとでは，Yagerの規則は$m^*_{sp}(GO)$を最小にし，打上げに対して最も慎重な規則となる．

3．情報の動的な更新

時々刻々と得られる情報を用いて，既に得られている情報をいかに更新するかは，理論的にも実用上の観点からも重要な問題である．

不確実情報に基づくビリーフ関数の更新については，つぎのようなモデルが論じられることが多い(例えば，[1][3][8]参照)．

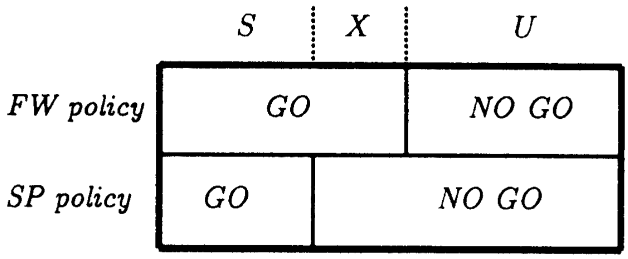

図3　2種類の意思決定方策

$$\mathrm{Bel}'(A)=\sum_{B\in 2^X} m_I(B)\,\mathrm{Bel}(A|B) \qquad (14)$$

ここで，Belは更新前のビリーフ関数，m_Iは新たに獲得した情報，Bel′は更新後のビリーフ関数を表す．なお，(14)式は，確率論におけるJeffreyの規則[7]を証拠理論の枠組みの中で拡張したものである．

さて，(14)式の$\mathrm{Bel}(A|B)$は，命題Bを真であると見なすときのAに対する確信の度合を表し，ビリーフ関数の条件付けと呼ばれる．これに関してはいくつかの考え方がある．

例えば，前田・市橋[8]は，$[\mathrm{Bel}(A), \mathrm{Pl}(A)]$の幅と比べて$[\mathrm{Bel}(A|B), \mathrm{Pl}(A|B)]$の幅をできる限り変化させないこと，すなわち命題成立への確信度に関する不特定性を条件付けによってむやみに小さくすることを避けようとする観点から，ビリーフ関数の条件付け$\mathrm{Bel}(A|B)$を次のように定義している．

$$\mathrm{Bel}(A|B)=\frac{\mathrm{Bel}(A\cap B)}{\mathrm{Bel}(A\cap B)+\mathrm{Pl}(\bar{A}\cap B)} \qquad (15)$$

また，「命題Bによる条件付け」を「既に得られていた情報mと，新たに入手された$\tilde{m}(B)=1$との統合」によって「命題Bによる条件付け」を定義することもできる．このような条件付けはDempsterの条件付け規則[10]として知られており，次式で与えられる．

$$\mathrm{Bel}(A|B)=\frac{\mathrm{Bel}(A\cup\bar{B})-\mathrm{Bel}(\bar{B})}{1-\mathrm{Bel}(\bar{B})} \qquad (16)$$

さらに，Dempsterの条件付けを情報更新に適用する場合に見られる問題点を解消すべく，(12)式の情報統合規則を応用したつぎのような$\mathrm{Bel}(A|B)$も提案され，いくつかの性質が明らかとな

っている[6].

$$\mathrm{Bel}(A|B)=\{1+k_B\mathrm{Bel}(\bar{B})\}\{\mathrm{Bel}(A\cup\bar{B})-\mathrm{Bel}(\bar{B})\} \quad (17)$$

$$0\leq k_B\leq\frac{1}{1-\mathrm{Bel}(\bar{B})} \quad (18)$$

ただし，$k=\{1-\mathrm{Bel}(\bar{B})\}^{-1}$のとき，(17)式はDempsterの条件付け(16)式に一致する.

4. おわりに

Dempster-Shaferの証拠理論は，知識や情報の不確実性あるいは不完全性を比較的自然な形で表現できる理論である．確率論は規範的な推論・意思決定モデルを提供するが，必ずしも実際の状況を適切に表現できるとは限らない．証拠理論的アプローチの必要性もそこにあり，人間の命題解釈の特性を柔軟に表現する情報統合規則ならびにその基礎となる新しい予備割当関数の提案[2]やDempster-Shafer理論と信念様相論理とを結び付けた信念形成モデルの研究[9]なども行われている．しかし，ビリーフ関数の条件付けや情報更新規則などについては，未だ十分な議論が確立されているとはいえず，動的な推論あるいは意思決定へ向けて，さらなる研究が期待されている．

参考文献

[1] Dubois, D., H. Prade, A Survey of Belief Revision and Updating Rules in Various Uncertainty Models, *Int. J. Intelligent Systems*, Vol. 9, pp. 61-100, 1994.

[2] 長谷川，稲垣，Dempster-Shafer理論に基づくシステム安全制御のための意思決定支援，システム制御情報学会論文誌，Vol. 7, No. 5, pp. 8-15, 1994.

[3] Ichihashi, H., H. Tanaka, Jeffrey-Like Rules of Conditioning for the Demptster-Shafer Theory of Evidence, *Int. J. Approximate Reasoning*, Vol. 3, pp. 143-156, 1989.

[4] Inagaki,T.,Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes via Dempster-Shafer Theory, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. 40, No. 2, pp. 182-188, 1991.

[5] Inagaki, T., Dempster-Shafer Theory and Its Applications, In K. B. Misra (Ed.), *New Trends in System Reliability Evaluation*, pp. 587-624, Elsevier Science Publishers, 1993.

[6] 伊藤，稲垣，証拠理論における確信関数の更新と新たな条件付けの提案，計測自動制御学会論文集，Vol. 31, No. 12, pp. 2011-2017, 1995.

[7] Jeffrey, R. C., *The Logic of Decision*, McGraw-Hill, 1965.

[8] 前田，市橋，ベイズ定理の証拠理論への拡張について，システム制御情報学会論文誌，Vol. 5, No. 12, pp. 481-490, 1992.

[9] 村井，宮腰，新保，証拠と信念に基づくファジィ論理の一構成，日本ファジィ学会誌，Vol. 8, No. 5, pp. 801-810, 1996.

[10] Shafer, G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, 1976.

[11] 菅野，室伏，ファジィ測度，日刊工業新聞社，1993.

[12] Yager, R. R., On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules, *Information Science*, Vol. 41, pp. 93-137, 1987.

[問い合わせ先]
〒305-8573
茨城県つくば市天王台1-1-1
筑波大学電子・情報工学系
先端学際領域研究センター
稲垣 敏之
TEL：0298-53-5537
FAX：0298-53-5206
Email：inagaki@is.tsukuba.ac.jp