数学的活動としての一般化

著者	倉井 庸維
著者別名	Kurai Tsunetsuna
雑誌名	研究紀要
号	38
ページ	125-128
発行年	2000-12-26
URL	http://hdl.handle.net/2241/9065

数学的活動としての一般化

数学科　倉 井 庸 維

1．はじめに

新しい学習指導要領（文部省，1999）では，「数学的活動」が数学の学習の中に新しい用語として盛り込まれ，重視されている。そこでの「数学的活動」とは，観察，操作，実験・実習等の外的な活動と，直観，類推，帰納，演繹等の内的な活動に分けられており，小学校では主として，作業的・体験的な活動などを算数的活動とし，中学校では，観察，操作，実験を通した数理的な考察などが数学的活動として上げられている。これに対して，高等学校における数学的活動としては，「数学化」と「数学的考察と処理」，「活用・意味づけ」の３つが上げられている。

「数学的活動」が，重視されるに至った背景には，数学の学習内容を完成された知識体系としてとらえ，生徒に習得することを目標に指導するだけでなく，生徒がすでに学習した数学の知識や経験をもとに，新しい知識を自ら構成していくことが目標として掲げられ，その構成過程が重視されていることがあるといえる。つまり，ある数学的関係や定理を自らの知識や経験・体験をもとに構成していくことが目標となっており，そのための方法として「数学的活動」が位置づけられているといえる。これは，従来の数学教育において目指されてきた「数学的な考え方」の育成の延長線上に位置するものであるが，知識は，外から与えられるものではなく，それまでの自分の知識や経験・体験をもとに自分自身によって構成していくことによってなされるという知識観が，一層強められたことによるものといえる。

高等学校における「数学的活動」の中の１つである「数学的考察と処理」に，数学的知識を構成する活動は含まれており，その方法の１つとして一般化(generaliza-tion)が上げられている。Polya(1973) は，一般化を，数学を作る上での基本的な精神操作(fundametal mental operation) の１つであり，重要な考え方であるとしている。彼は，一般化を，「与えられた一組の対象の考察からそれを含むより大きな組の考察に移ること」であるとして，一般化の方法としては，三角形の考察からｎ角形に移る際に，定数を変数に変える方法（「定数の変数化」と呼ぶ）と，鋭角の三角関数の研究から一般角の三角関数に移るような，制限を取り除く方法（「範囲の拡大」と呼ぶ）の２つを上げている。

これに対して，Yerushalmy(1993)は，一般化の方法として，「帰納による事例からの一般化」，「記述からの一般化」，「定義の変更からの一般化」の３つを上げている。「帰納による事例からの一般化」とは，個々の事例を調べ，そこに共通にみられる特性を抽出し，一般的に表現することである。例えば，３＋７＝10，７＋13＝20，11＋19＝30等の事例から，「４以上の偶数は，２つの素数の和で表される」と一般的な表現が可能な大きな集合を考えることをさす。「記述からの一般化」とは，すでに推測あるいは証明された記述を含んだより一般的な表現で表すことであり，Polya の示した一般化の方法は，ここに含められている。さらに，「定義の変更による一般化」とは，Kitcher(1984) によって示されたものであり，古い定義の意味を拡張し，それらを含むように定義をより広く変え，拡張していくことである。

Yerushalmyは，Polya の一般化の方法を詳細にし、さらに拡大したといえる。しかし，Yerushalmyは，「帰納による事例からの一般化」と「記述からの一般化」がなされる学習場面やその機能が明確ではなく，また，彼女の研究では，コンピュータソフトを用いた幾何学習を対象としており，他分野の数学の授業場面における活用については，明らかにしていない。

そこで，一般化の方法として，「機能による事例からの一般化」と「記述から一般化」が，幾何以外の学習場面で使用される際の違いを明らかにするために，多くの高等学校で使用される２つの題材（「行列のｎ乗の計算」と「円の接線の方程式」）を用いて，実際に一般化を行い，その過程から調べることにする。

2．帰納による事例の一般化

「帰納による事例からの一般化」は，多くの事例から推測を作ることであり，一般則を導くことである。

例えば，数学Ｃの「行列のｎ乗」では，ｎ＝１，２，

３と計算を行い，そこから，帰納して，ルールを見いだすのである。

例えば，

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，A^1，A^2，A^3 は，

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{pmatrix}$$

となり，ここから，変化している成分，変化していない成分を観察し，そこに一定のルールを見つけ，

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$$

と推測する。

この一般化の場合，ルールは，ｎ乗されると成分（１，２）の値が，ｎ倍されるということができる。しかし，ルールを見いだす過程での計算は，証明へは直接つながらず，証明は，別の方法，この場合は数学的帰納法によってなされる。

ある行列Ａの成分が与えられ，その行列について，A^2，A^3 の成分を求めることで学習が終わるのではなく，A^n の成分を求めることへと一般化することによって，隠されたルールを見つける探究的な学習へと入ることができる。行列の場合，乗法の計算ができれば，生徒なりに，様々な定理を見つけたり，条件を追求することができるので，数学を作る喜びを味わうことができたようであった。また，ケーリー・ハミルトンの公式と関連させて，考察すればより発展的に扱うこともできる。

「帰納による事例からの一般化」は，事例を見いだすための計算間違い等を起こすことがなければ，推測によって一般化を得ることが容易であるといえる。しかし，すべての生徒が推測をし，一般則を見つけだすことができるとは限らないことは，実際に授業を行ってみると明らかである。こうした場合，次のような５段階が考えられる。

０．推測を作成できない

Ⅰ．ルールや規則性，何らかの関連性があると気づくが，何ら表現できない

Ⅱ．ルールや規則性を，日常語で漠然と表現できるが，数式や数学用語を用いて表現できない

Ⅲ．ルールや規則性を，数式で表現できるが正しくない

(a. ルールや規則性を誤って認識している場合)

(b. ルールや規則性の認識は正しいが，数式の表現が誤っている場合)

Ⅳ．ルールや規則性を，数式で正しく表現できているが，検証していないあるいは証明に至らない（実験的検証さえ行っていない）

Ｖ．一般化によってできた推測の証明を行い，正しく認識している

これらの一般化への段階について，その妥当性とそれぞれの段階にいる生徒に対する指導については，今後の課題と考えられる。

この「帰納による事例からの一般化」は，学習の初期場面や推測を作る場面で使用することができるといえる。また，一般化の結果として得られた推測に対する証明方法は，一般化の過程とは異なるため，証明については，新たに考える必要が生じるといえる。

３．記述による一般化

次に，記述による一般化を取り上げる。これは，Polyaによる「定数の変数化」と「範囲の拡大」を含んでいる。

ここでは，数学Ⅱ「図形と方程式」で扱われている「円の接線の方程式」を題材として取り上げる。

この題材は，「円の方程式」（中心(a, b)，半径ｒの円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$）について学習した後，「円と直線との関係」の学習の中で扱われる。

まず，以下の問題から始める。

【問題１】

原点を中心とした半径５の円の周上の点（３，４）における接線の方程式を求めよ。

『解法』

接線は，円の中心と接点を結ぶ半径と垂直に交わることと，直線の垂直条件（2直線の傾きを，m，m' とすると，m・m' ＝－1）を利用して，$3x+4y=25$を得ることができる。

次に，以下のように一般化された問題が，考えられる。

> 【問題2】
> 原点を中心とした半径rの円の周上の点（x_1，y_1）における接線の方程式を求めよ。

これは，【問題1】に対して，周上の点（3，4）は（x_1，y_1）に，半径5はrに，「定数の変数化」によって一般化された問題となっている。しかし，問題の解法は，定数の場合と同様に考えることができ，

接線の方程式（$x_1x+y_1y=r^2$ ・・・(*)）

を構成することができる。

この解法は，「定数の変数化」することによって，一般化された問題になり，さらに，その解法は，証明へと導かれる例になると考えられる。この原点を中心とした半径rの円の周上の点（x_1，y_1）における接線の方程式は，大抵の教科書に記載されており珍しくないが，具体的な数値を持った問題（【問題1】）を，これまでに学習した知識を用いて解決し，その後定数を変数に変えることによって，一般的な公式とその証明へと生徒自身で導くことができる。

さらに，生徒は，中心が原点以外にある円の方程式については，すでに学習しているので，原点を中心とした円の場合のみに接線の方程式を限定するのではなく，中心が一般的な(a, b)である場合の円の接線の方程式へと対象範囲を広げることは，自然な考え方であると思われる。これは，Polyaの「範囲の拡大」による一般化であるといえる。

実際の指導においては，一旦具体的な数値の問題に戻して考える場合もある。例えば，以下のような問題である。

> 【問題3】
> 中心（1，2），半径5の円の円周上の点（4，6）における接線の方程式を求めよ。

これまでの学習の流れから，この問題に取り組む段階で，平行移動についての一般的な法則について気づく生徒もいると思われる。

解法は，以下のようになる。

『解法』

求める接線の傾きは，

$-\dfrac{4-1}{6-2}$ で，点（4，6）を通るので，

$y-6=-\dfrac{3}{4}(x-4)$ となり，

$3(x-4)+4(y-6)=0$　となる。

ここで，係数3と4は，接点の座標（4，6）から中心（1，2）を引いた値である。

つまり，$(4,6)-(1,2)=(3,4)$ である。

すると，$(x-4)$，$(y-6)$ も同様に，

$\{x-(3+1)\}=(x-1)-3$,

$\{y-(4+2)\}=(y-2)-4$

と変形すると，

$3(x-1)-9+4(y-2)-16=0$ となり，

$3(x-1)+4(y-2)=25=5^2$。

（解法終わり）

これは，【問題2】の解答（*）と比較すると，中心を原点（0，0）から（1，2）へ（1，2）だけ平行移動したと考えられる。

その後，「定数の変数化」による一般化を行い，以下の問題が設定される。

> 【問題4】
> 中心が(a, b)で半径rの円の円周上の点（X_1，Y_1）における接線の方程式を求めよ。

この解法も問題3の定数，すなわち，中心（1，2）を（a，b）へ，円周上の点（4，6）を（X_1，Y_1）へと，変数に変えればよい。

『解法』

接線の方程式は，

$y-Y_1=-\dfrac{X_1-a}{Y_1-b}(x-X_1)$　であり，

$(X_1-a)(x-X_1)+(Y_1-b)(y-Y_1)=0$

となる。

中心を原点とした円の場合で考え，その時の接点ｇ (X_1, y_1) とすると，

$(x_1, y_1) = (X_1 - a, Y_1 - b)$ より，

$(X_1, Y_1) = (x_1 + a, y_1 + b)$ となり，

$x_1\{x-(x_1+a)\} + y_1\{y-(y_1+b)\} = 0$

と変形され，

$x_1^2 + y_1^2 = r^2$ より，

$x_1(x-a) + y_1(y-b) = r^2 \cdots (**)$

となる。

(x_1, y_1) は，問題には与えられていないのでもとに戻すと

$(X_1-a)(x-a) + (Y_1-b)(y-b) = r^2$ **

となる。

（解法終わり）

ここまでの過程を証明とすることもできる。また，式(**)を，式(*)と比較すると，中心の座標（a,b)だけ平行移動したことがわかる。

したがって，この過程から，中心が (a,b)で，半径ｒの円の周上の点(X_1，Y_1)で接する接線の方程式の公式を覚えていなくとも，原点を中心とした円に平行移動して接線の方程式を求め，その後，逆の平行移動を行うことによってもとに戻して求めることも可能なことがわかる。このように，一般化の過程から，平行移動の考え方は，図形において重要であることがわかるのである。

この平行移動の考え方を活用して問題を解決する学習は，その後，数学Ｃにおいて，一般的な二次曲線（放物線，楕円，双曲線）の問題（以下の例題５）として現れ，再度平行移動の考え方の重要性を認識することになるのである。

例題５（寺田ほか，2000）

点（３，１）を通り，２直線

$y = 2x - 3 \quad \cdots ①$

$y = -2x + 5 \quad \cdots ②$

を漸近線にもつような双曲線の方程式を求めよ。

４．結論と今後の課題

「帰納による事例の一般化」，「記述の一般化」の学習場面への関わりを中心に，その違いについて，具体的な題材を用いて調べ，以下の表のようにまとめることができる。

	帰納による事例からの一般化	記述からの一般化
学習場面	初期・導入場面	展開・拡張 発展場面
証明との関係	推測を生む 証明方法とは別	証明へのヒント 関連性大

今後，さらに別の題材に対して，この一般化の方法を用いて，数学を構成する授業展開を実践していきたいと考えている。

＜参考文献＞

Kichter,P .(1984). The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford University Press.

文部省（1999）. 高等学校学習指導要領解説　数学編 理数編，9-11.

Polya, G.(1973). Induction and Analogy in Mathematics, Volume 1 of Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press

寺田文行ほか(2000)高等学校　数学Ｃ，桐原書店，62

Yerushalmy,M.(1993). Generalization in Geometry, In J. Schwartz, M.Yerushalmy & B.Wilson(Eds.), The Geomrtric Supposer: What is it a Case of? (pp.57-84), Lawrence Erlbaum Associates Publishers