様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２０日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０１６３
研究課題名（和文）　代数解析学の幾何学への応用

研究課題名（英文）　Applications of algebraic analysis to geometry

研究代表者
竹内　潔（TAKEUCHI KIYOSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：７０２８１１６０

研究成果の概要（和文）：高次元の不動点集合を持つ写像にたいする Lefschetz 不動点公式を研究し、不動点指数を具体的に表示する公式を得た。また Gelfand らが導入した A-判別式多様体の次元や次数を、配置 A の幾何学的情報を用いて記述する公式を得た。さらにこれらの研究の副産物として、多項式写像の無限遠点のまわりのモノドロミー、A-超幾何関数の解析接続、局所ゼータ関数の極のなどについても様々な結果が得られた。

研究成果の概要（英文）：We studied Lefschetz fixed point formulas for maps with higher-dimensional fixed point sets and obtained a formula which expresses their fixed point indices explicitly. We also obtained formulas describing the dimensions and the degrees of A-discriminant varieties introduced by Gelfand etc. in terms of the geometric data of the configuration A. Moreover, as byproducts of this research, various results on the monodromies at infinity of polynomial maps, the analytic continuations of A-hypergeometric functions and the poles of local zeta functions etc. are also obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：代数解析
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：D 加群、超幾何関数、特異点理論、ラドン変換、偏屈層、モノドロミー

１．研究開始当初の背景

研究代表者はこれまで、D-加群や層の超局所解析などの代数解析の手法を用いて、偏微分方程式系や複素特異点理論などを研究してきた。特に表現論やトポロジーにも応用がある交叉コホモロジーや特性サイクルなどの分野に興味を持ち、D-加群（偏屈層）の理論の複素超曲面の特異点理論への応用や、構成可能関数にたいする位相的ラドン変換とその射影双対性（代数幾何学の一分野）への応用に関する研究を行ってきた。研究代表者は

これらの経験を踏まえて、構成可能層の積分変換の射影双対性への応用（実および複素の特異点理論）、群の作用を持つ構成可能層の Lefschetz 型不動点公式（代数解析の基礎理論であり、表現論、トポロジーへの応用)、ホロノミック D-加群の超関数解の次元公式（線型偏微分方程式論への応用、論文[6] などにおける研究の続き）の３テーマについて、多面的に研究を開始した。新しい研究テーマの構成可能層の Lefschetz 型不動点公式については、Goresky-MacPherson らの結果を部分的に拡張する結果を補助金の申請時にすでに得ており、その方面の理論を特に発展させようとしていた。また構成可能層の積分変換の研究に関しては、松井優氏との共同研究において超局所的な基礎理論が完成し、射影代数多様体とその双対多様体あいだのトポロジーの対称性に関する多くの結果が得られていた。これらを A-判別式多様体などのより具体的な問題に適用し、より詳しい結果を得ることが、ひとつの問題意識として芽生えていた。

２．研究の目的

まず新しい研究テーマである構成可能層の Lefschetz 型不動点公式について説明する。
位相幾何における古典的な Lefschetz の不動点公式は、多様体の自己同相写像の誘導するホモロジー群への作用を、写像による不動点の情報で記述するもので、不動点の存在の証明や不動点の数を計算するのに大きな威力を発揮する。しかしながら、これまでのほとんどの結果は写像の不動点が孤立している場合に適用範囲が限られていた。そこで写像の不動点集合の次元が高い場合に、不動点集合からのコホモロジー群上の作用への寄与の数学的な構造を解明するのを主たる目的とした。次に構成可能層の積分変換とその射影双対性への応用の研究の目的について説明する。研究代表者は松井優氏との共同研究において、代数幾何における射影代数多様体とその双対多様体のあいだの様々な位相的な普遍量の対称性に関する結果が、代数解析における位相的ラドン変換の理論の超局所解析的な考察から従うことを発見した。
例えば双対多様体の次元や次数を、元の多様体の位相的な情報で記述することができる。しかしながら、ミルナー数などの基本的な普遍量を表現する研究はこれまでなかったといってよい。これについても、これまでの研究で解明された超局所的な情報を使って精密に記述できるような理論を構築したいと考えていた。さらにホロノミック D-加群の超関数解の次元をその特性サイクルを用いて表現する公式を研究することを目指していた。

３．研究の方法

まず Lefschetz の不動点公式の一般化として成立すべき定理を推測するために、具体例の計算を出来るだけ行った。これらの試験的な計算は、旗多様体などの表現論的に重要な多様体の上の群作用を持つ構成可能層（偏屈層）の場合などについて、色々な分野の研究者の支援を受けつつ行った。その後、得られた Lefschetz の不動点公式の一般化として推測された定理の理論的な証明に挑戦した。柏原-Schapira や Goresky-MacPherson らによる代数解析的手法に加え、代数幾何における重複度を加味した交点理論、代数的トポロジーなどを用いて、その解決に取り組んだ。
そしてその解決には、今まで Lefschetz 型不動点公式の研究には余り活用されてこなかった、超局所的な視点による研究が大いに役立った。特に Guillermou の研究を発展させることにより、一般の構成可能層にたいする Lefschetz 型不動点公式が証明できた。すなわち不動点多様体の余接束の中に Lagrangian cycle を構成し、それと余接束の零切断の交点数が不動点指数と一致することを証明した。この結果は、構成可能層の Euler 標数についての柏原の超局所指数定理を群作用付きの構成可能層に一般化することで証明できた。また他の研究テーマである構成可能層の積分変換については、これまでの研究で確立された一般理論を適用することにより、Gelfand らが導入した A-判別式多様体の次元と次数を配置 A を用いて表す公式を発見した。その過程において、正規とは限らない一般の特異性を持つトーリック多様体のオイラー障害や、その上の関数のミルナーモノドロミーの公式が副産物として得られた。またそこで開発された手法を応用して、Broughton, Libgober, Sperber, Siersma, Tibar らが研究していた多項式写像の無限遠点回りのモノドロミーの公式を、写像の値域が高次元の場合に拡張した。その際に新たに考え出したのは、トーリック多様体の理論を用いた複素ベクトル空間のコンパクト化をさらにブローアップして有理型関数の不確定点を解消する方法である。この空間のコンパクト化の構成法は構成可能層や消滅サイクルなどの代数解析の手法と大変相性が良く、非常に一般的な結果が得られる。特に斉藤盛彦による混合ホッジ加群の理論を合わせ用いることにより、多項式写像の無限遠点の回りのモノドロミーの一般理論が完成しつつある。さらに同様の空間のコンパクト化の手法を A-超幾何微分方程式系の解（A-超幾何関数）の構成可能層に適用することで、A-超幾何関数の無限遠点回りの解析接続の公式も得ることができた。

４．研究成果

(1) 研究の主な成果

群作用を持つ構成可能層のLefschetz型不動点公式について研究を行い、不動点集合が高次元の多様体の場合に不動点指数を具体的に表示する公式を得た。すなわち不動点多様体の余接束の中にLagrangian cycleを構成し、それと余接束の零切断の交点数が不動点指数と一致することを証明した。さらに、この我々の構成したLagrangian cycleが層の導来圏における順像や逆像をとる操作に関して良い函手性を持つことを証明し、柏原-Schapiraが特性サイクルについて得たほとんどすべての結果を群作用付きの状況に拡張した。つぎに構成可能層の積分変換の研究の進展について述べる。我々はGelfand-Kapranov-Zelevinskyが判別式の概念の多変数多項式への自然な拡張として定義し研究したA-判別式多様体が双対多様体の一種であることに着目し、その次元や次数を具体的に求めることに成功した。その際の議論をさらに進めることにより、多くの分野において応用を得ることができた。まずVarchenko, Kirillov, Okaらが得た複素アフィン空間の上のミルナーファイバーのモノドロミーの公式を、任意の複素トーリック多様体の上のミルナーファイバーに拡張した。またその成果を応用して、Broughton, Libgober, Sperber, Siersma, Tibarらが研究していた多項式写像の無限遠点回りのモノドロミーの公式を、写像の値域が高次元の場合に拡張した。同じ手法をA-超幾何微分方程式系の解（A-超幾何関数）の構成可能層に適用することでA-超幾何関数の無限遠点回りの解析接続についての解析的な公式も得ることができた。さらに以上の研究で培った技術を超関数の理論と組み合わせることで、多項式の局所ゼータ関数の極の係数や振動積分の漸近展開係数などを、いくらでも精密に計算可能な理論を構成し、多くの場合に明示的に表示する公式を与えた。

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

群作用を持つ構成可能層のLefschetz型不動点公式については、これまでの研究のほとんどは不動点集合が孤立している場合のものだった。不動点集合の次元が高い場合の同様の問題はGoresky-MacPhersonによっても研究されているが、我々の結果は彼らの結果の拡張になっている。特に従来の手法では困難だと思われる、不動点多様体にそって写像が膨張する場合にも不動点指数を具体的に書くことに成功している。またその証明で用いられる新しいLagrangian cycleの理論は、柏原-Schapiraによる特性サイクルの理論を拡張するものである。A-判別式多様体の次元や次数の公式については、我々の結果はStrumfelsらによる組み合わせ論的な公式とは異なり、配置Aの幾何的情報を用いて結果を記述することが可能だというメリットがある。また多項式写像の無限遠点のまわりのモノドロミーについては、これまでの研究では多項式写像の値域が複素平面の場合に無限遠点のまわりでのモノドロミー線型写像の固有値のみが主に研究されてきたが、我々の研究により値域が高次元の場合も扱えるようになり、線型写像のJordan細胞の大きさや個数などについても従来のモノドロミー定理よりもずっと強い上限の評価が得られるようになった。またA-超幾何関数の大域的なモノドロミーについては、これまでの研究ではほとんど何もわかっていなかった。我々の得たA-超幾何関数の無限遠点のまわりのモノドロミーの公式は、その解明の手がかりになるとものと期待している。超関数論や整数論で重要な局所ゼータ関数の極については、これまでの研究では極の位置の候補や深さについての漠然とした評価があるのみであった。我々の手法は、これらの極の係数をいくらでも詳しく記述することを初めて可能にするものであり、今後の発展が期待される。

(3) 今後の展望

構成可能層のLefschetz型不動点公式については、写像についての幾何学的な仮定がまだついており、これを外した場合に結果を一般化することが課題である。またA-超幾何関数の大域的なモノドロミーの研究はまだ始まったばかりであり、今後不確定特異点を持つ場合なども含む形で研究を発展させていきたい。最後に、局所ゼータ関数は整数論、超関数論、概均質ベクトル空間の理論などで重要な対象であり、我々が実数体上で成功した方法をｐ進体上の局所ゼータ関数（井草ゼータ関数）に拡張することは重要であると思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① 竹内潔, Monodromy at infinity of A-hypergeometric functions and toric compactifications, Mathematische Annalen, 査読有, 2010, 印刷中

②竹内潔、松井優, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 2010, 印刷中
③竹内潔、松井優, Microlocal study of Lefschetz fixed-point formulas for higher-dimensional fixed point sets, International Mathematics Research Notices, 査読有, Vol. 2010, No.5, 2010, 882-913
④竹内潔、松井優, A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties, RIMS kokyuroku bessatsu, 査読有, B10, 2008, 149-165
⑤竹内潔、松井優, Topological Radon transforms and their applications, RIMS kokyuroku bessatsu, 査読有, B5, 2008, 225-240
⑥竹内潔、松井優, Topological Radon transforms and degree formulas for dual varieties, Proc. Amer. Math. Soc, 査読有, Vol. 136, 2008, 2365-2373
⑦竹内潔, Perverse sheaves and Milnor fibers over singular varieties, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, Vol. 46, 2007, 211-222
⑧竹内潔、松井優, Generalized Plucker-Teissier-Kleiman formulas for varieties with arbitrary dual defect, Proceedings of Australian-Japanese workshop on real and complex singularities, 査読有, 2007, 248-270
⑨竹内潔、松井優, Microlocal study of topological Radon transforms and real projective duality, Advances in Math, 査読有, Vol. 212, No.1, 2007, 191-224

〔学会発表〕（計２３件）

①竹内潔, Motivic Milnor fibers at infinity and mixed Hodge modules, 第５回代数・解析・幾何学セミナー, 2010 年 2 月 15 日, 鹿児島大学理学部
②竹内潔, Newton polyhedra, constructible sheaves and their applications, Australian-Japanese workshop on real and complex singularities, 2009 年 9 月 15 日, オーストラリア、シドニー大学
③竹内潔, Monodromy at infinity, A-hypergeometric D-modules and local zeta functions, Geometry of Singularities, 2009 年 8 月 31 日, ドイツ、ミュンスター大学
④竹内潔, Monodromy at infinity and the poles of local zeta functions, Fifth Franco-Japanese symposium on singularities, 2009 年 8 月 28 日, フランス、ストラスブール大学
⑤竹内潔, Geometric Radon transforms and A-hypergeometric functions, Workshop on Integral Geometry and Group Representations, 2009 年 8 月 7 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス（群馬県）
⑥竹内潔, Microlocal geometry of D-modules and characteristic classes (part I and II), 数論幾何における分岐理論, 2009 年 1 月 13 日, 神戸フラワーパークホテル
⑦竹内潔, A-discriminants, monodromy at infinity and GKZ-hypergeometric functions, 超幾何方程式研究会 2009, 2009 年 1 月 5 日, 神戸大学理学部
⑧竹内潔, Lefschetz fixed point formulas over singular varieties, Geometric Singularity Theory, Polish-Japanese Singularity, 2007 年 7 月 8 日, ポーランド、ソポト

〔図書〕（計１件）

①竹内潔、堀田良之、谷崎俊之, D-modules, perverse sheaves and representation theory, Birkhauser, 2008, 425 pages

〔その他〕
ホームページ等

つくばリポジトリー：
https://www.tulips.tsukuba.ac.jp/dspace/handle/2241/98676

６．研究組織
(1)研究代表者
竹内　潔（TAKEUCHI KIYOSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：７０２８１１６０

(2)研究分担者
諏訪　立雄（SUWA TATSUO）
北海道大学・名誉教授
研究者番号：４０１０９４１８
田島　慎一（TAJIMA SHINICHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：７０１５５０７６
谷崎　俊之（TANISAKI TOSHIYUKI）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：７０１４２９１６
（H21：連携研究者）