

# 散乱理論と逆問題

磯崎 洋

概要 量子力学における3体問題と境界値逆問題に関する最近の話題について解説する。3体問題の連続スペクトルに対応する固有函数展開定理と、双曲幾何学の境界値逆問題への応用が主題である。

## 1. SCHRÖDINGER 作用素

### 1.1. 原子・分子のエネルギー作用素. Schrödinger 作用素とは

$$H = -\Delta + V(x)$$

という形の微分作用素で、原子や分子などの微小な粒子の量子力学的性質を論ずるときの基本的な手段である。  $x \in \mathbf{R}^n$  は粒子の位置座標を表し、  $\Delta$  は  $\mathbf{R}^n$  上のラプラシアン、  $V(x)$  はポテンシャルと呼ばれる実数値函数である。  $H$  は  $L^2(\mathbf{R}^n)$  上の自己共役作用素となる。  $H$  のスペクトルは実軸上の閉集合であるが、粒子の取り得るエネルギーの値を表す。

有限個の粒子からなる系のスペクトルは次のようになる。ある値  $E_0 \in \mathbf{R}$  より小さいところには離散的な固有値しかなく、  $E_0$  から上はすべてのエネルギーを取り得る。前者を離散スペクトル後者を連続スペクトルと呼ぶ。

### 1.2. 束縛状態と散乱状態. 固有値問題

$$(H - \lambda)\varphi(x, \lambda) = 0 \tag{1.1}$$

は系のエネルギーを計算するのみならず、系の物理的状態を知る上でも重要である。  $\lambda < E_0$  が離散スペクトルに属するとき、(1.1) は  $L^2(\mathbf{R}^n)$  に属する固有ベクトルを持つ。それを  $\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi(x, \lambda)|^2 dx = 1$  となるように正規化すれば、  $\mathbf{R}^n$  の領域  $D$  に対して  $\int_D |\varphi(x, \lambda)|^2 dx$  は粒子が  $D$  に存在する確率を表す。従って  $\lambda$  が固有値であれば、粒子は  $\mathbf{R}^n$  内の有限な領域に局在していると考えてよい。このことから粒子は束縛状態にあるという。

$\lambda > E_0$  のとき (1.1) は一般には  $L^2(\mathbf{R}^n)$  に属する固有ベクトルを持たない。量子力学の基本原理は、  $L^2(\mathbf{R}^n)$  に属さない (1.1) の解  $\varphi(x, \lambda)$  であって離散スペクトルに対する固有ベクトルと併せて  $L^2(\mathbf{R}^n)$  の完全系をなすものが存在する、と主張する。連続スペクトルをもつ Schrödinger 方程式の解は時間が経過するにつれて系の束縛を離れ、無限遠方に去ってしまう。このとき粒子は散乱状態にあるという。

1.3. 固有函数展開. 上で述べた固有函数の完全系を求めることが固有函数展開である。多次元の2体系 Schrödinger 作用素  $H = -\Delta + V$  に対する固有函数展開定理は池部 [9] によるものが最初である。それによれば次のことが成り立つ。  $V(x)$  が遠方で十分速く減少するときに次のような函数  $\psi(x, \xi)$ ,  $\xi \in \mathbf{R}^n$ , が存在する:  $\psi(x, \xi)$  は  $(H - |\xi|^2)\psi = 0$  をみたし

$$\psi(x, \xi) \sim e^{ix \cdot \xi} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}} A(E, \theta, \omega), \quad r \rightarrow \infty,$$

( $r = |x|, \theta = x/r, \omega = \xi/|\xi|, E = |\xi|^2$ ) という漸近挙動をもち, 任意の  $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$  は

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x, \xi) \tilde{f}(\xi) d\xi + \sum_j (f, \psi_j) \psi_j(x),$$

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \overline{\psi(x, \xi)} f(x) dx \quad (1.2)$$

と展開される. ここで  $(\cdot, \cdot)$  は  $L^2(\mathbf{R}^n)$  の内積であり,  $\psi_j$  は  $H$  の離散スペクトルに対応する固有ベクトルである.  $V(x) = 0$  のときは  $\psi(x, \xi) = e^{ix \cdot \xi}$  であり, (1.2) は Fourier の反転公式となる. 従って (1.2) は一般化された Fourier 変換と呼ばれる.  $\psi(x, \xi)$  は一般化された固有関数と呼ばれ (以下, 簡単のため単に固有関数と呼ぶ),  $A(E, \theta, \omega)$  は散乱振幅と呼ばれる.

1.4. S 行列. 量子力学的散乱実験は次のようにして行われる. 標的となる粒子を設置し,  $\omega$  方向からエネルギー  $E$  を持った粒子を単位時間あたり一個ずつ衝突させる. このとき  $\theta$  方向には  $|A(E, \theta, \omega)|^2$  個の粒子が散乱される. これは散乱断面積と呼ばれ物理的に観測される量である.

$$S(E)f(\theta) = f(\theta) - C(E) \int_{S^{n-1}} A(E, \theta, \omega) f(\omega) d\omega$$

という積分作用素を考えれば ( $C(E)$  は適当な定数である), これは  $L^2(S^{n-1})$  上のユニタリー作用素になる. これを S 行列と呼ぶ. 実験で観測できるのは散乱断面積  $|A(E, \theta, \omega)|^2$  であって, 散乱振幅  $A(E, \theta, \omega)$  ではない. しかし例えばポテンシャルが小さいときには散乱断面積から散乱振幅を構成できることが知られている. そこで (少なくともポテンシャルが小さいときには) S 行列は物理実験から直接得られるものと考えてよいであろう. S 行列は元の物理系と等価なものであろう, すなわち S 行列から元の Schrödinger 作用素  $H = -\Delta + V(x)$  が再構成できるであろうと信じられている.

1.5. 定常 Schrödinger 作用素の基本問題. ポテンシャル  $V(x)$  が与えられたとして上のような固有関数の完全系と S 行列を求めることを順問題, 逆に S 行列から  $V(x)$  を求める問題を逆問題と呼ぶ. これは散乱実験により粒子を決定するための理論的基盤を与えるものである. 1次元の順問題は長い歴史をもつ. 1次元の逆問題は 1950 年代に解かれた. 粒子数が 2 個の場合の高次元の順問題は 1960, 70 年代に詳しく研究された. Schrödinger 作用素  $H$  の数学的研究の基礎には加藤敏夫, 2 体問題の研究には池部晃生, 黒田成俊 ([26]) 等によって日本から重要な貢献がなされていることは特筆すべきであろう. 3 個以上の粒子からなる系の時間に関する挙動 (いわゆる漸近完全性の問題) は 1980 年代後半に詳しく研究された. しかし多粒子系の連続スペクトルに関する固有値問題 (1.1) の解析は困難であるため, 現在でも残されている. 高次元における散乱の逆問題は 2 粒子系の場合でも完全には解決されていない.

## 2. 3 体系の固有函数展開

2.1. 3 体系の Schrödinger 作用素. Faddeev の仕事 [4] は 3 体問題に関する最初の大きな数学的成果である. ここでは固有函数展開による波動作用素の漸近完全性 (これは重要な問題なのだがここでは解説しない) の証明が主題であった. しかしこの仕事には, 全体の系を Fourier 変換して解析を行っているため固有函数の漸近挙動や S 行列の性質がよく分からない, また 2 粒子系の

0 エネルギー状態に関する間接的な仮定<sup>1</sup>を含んでいるため結果を適用できるポテンシャルのクラスを特定するのが難しい, 等の難点があった.

3 体問題を Fourier 変換せずにもとの  $x$ -空間のまま取り扱うことは 1970 年代後半に Ginibre-Moulin [7], Howland [8], Thomas [36] らによって行われた. これらの仕事は基本的に Faddeev [4] のアイディアに沿うものであり, 固有関数の漸近挙動や S 行列の性質, 2 粒子系の 0 エネルギー状態に関する上に述べた間接的な仮定, 等の問題はそのまま残された. 波動作用素の漸近完全性の問題は 1980 年代に一般的な仮定のもとに解決されたのだが, 3 体問題に対する固有値問題 (1.1) を解いて固有関数の完全系を構成すること, その空間的漸近挙動を求めること, 等の問題は未解決のまま残された.

論文 [17] においては (1) 3 体 Schrödinger 作用素のレゾルベントの無限遠点での漸近展開, (2) 3 体問題の連続スペクトルに対応する固有関数系と一般化された Fourier 変換の構成, (3) 固有関数の無限遠点での漸近展開と S 行列の構成, を行った. その特徴は

- 連続スペクトルに対応する固有値問題の固有空間を一般化された Fourier 変換で特徴づけていること,
- 固有関数の空間的漸近挙動をあらゆる方向に対して導いていること,
- S 行列と固有関数の漸近挙動との関係を明らかにしていること,
- ポテンシャルに対しての仮定がその減少度のみで, 2 粒子系に対する間接的な仮定 (0-共鳴状態の非存在) を課していないこと

等にある. まずその数学的内容を述べよう.

各粒子は  $\mathbf{R}^3$  の中を動くものとする. 3 個の粒子の座標を  $q^i \in \mathbf{R}^3$ , 質量を  $m_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする.  $a = (ij)$  は 2 つの粒子  $i, j$  の対を表わすものとし, 3 番目の粒子を  $k$  とする. 換算質量  $m_a, n_a$  を

$$\frac{1}{m_a} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}, \quad \frac{1}{n_a} = \frac{1}{m_i + m_j} + \frac{1}{m_k}$$

で定義し, Jacobi 座標系を

$$x^a = \sqrt{2m_a}(q^i - q^j), \quad x_a = \sqrt{2n_a}\left(q^k - \frac{m_i q^i + m_j q^j}{m_i + m_j}\right)$$

とすれば 3 体系の Schrödinger 作用素は

$$H_0 = -\Delta_{x_a} - \Delta_{x^a}, \quad H = H_0 + \sum_a V_a(x^a)$$

と書ける.  $H_0$  は 3 体系から質量中心を除いたものの運動エネルギーに対応する  $L^2(\mathbf{R}^6)$  上の作用素であり, 対  $a$  の取り方によらない.  $\sum_a$  は粒子の 3 つの対  $(ij), (jk), (ki)$  に関する和である.  $b$  が  $a$  と異なる対のとき  $x^b$  は  $x_a$  と  $x^a$  の一次結合で書けるから,  $\sum_a V_a(x^a)$  も  $L^2(\mathbf{R}^6)$  上の作用素である.

$$r = (|x_a|^2 + |x^a|^2)^{1/2}, \quad r_a = |x_a|, \quad r^a = |x^a|$$

とおく.  $r$  は対  $a$  の取り方によらない.

連続スペクトルに属するエネルギーを持つ時, この系は散乱状態にある. 散乱実験を図式的に表そう. 3 個の粒子を  $A, B, C$  とし, 最初, 粒子  $A, B$  が束縛状態にあるところに 3 番目の粒子  $C$

<sup>1</sup>Schrödinger 方程式  $(-\Delta + V(x))\psi(x) = 0$  をみだし  $|x| \rightarrow \infty$  で 0 に近づくが,  $L^2(\mathbf{R}^n)$  には属さない  $\psi(x)$  を 0-共鳴状態と呼ぶ. 間接的な条件とはこの 0-共鳴状態の非存在を仮定するものであるが, この条件は Schrödinger 方程式の解の性質と関係するためポテンシャルから直接検証することができない

が衝突したとする. このとき以下の5つの結果が生じ得る:

$$(A, B) + C \implies \begin{cases} (a) & (A, B) + C, \\ (b) & (A, B)^* + C_*, \\ (c) & (A, B)' + C, \\ (d) & (A, C) + B, \\ (e) & A + B + C. \end{cases}$$

(a) のときには衝突後も粒子の状態が変わらない. これを弾性散乱という. それ以外は非弾性散乱と呼ばれる. (b) においては対  $(A, B)$  のエネルギーが増加, あるいは減少し, (これを記号  $(A, B)^*$  で表わしている), 粒子  $C$  のエネルギーは減少, あるいは増加する (これを記号  $C_*$  で表わしている). (c) ではエネルギーは変化しないが対  $(A, B)$  は同じ固有値に属する別の固有状態に移行する (これを記号  $(A, B)'$  で表わしている). (d) は粒子の組み換えであり, (e) においては対  $(A, B)$  の束縛が解けて3個の粒子が相互作用なしに運動する. これは break-up process と呼ばれる. これらの状態を方程式  $(H - \lambda)u = 0$  の球面波の形で表現しよう. (通常, 自由粒子は  $e^{ix \cdot \xi}$  という平面波で代表されることが多い. しかし, これを

$$\int_{S^{n-1}} e^{i\sqrt{\lambda}\omega \cdot x} \phi(\omega) d\omega$$

のように積分すれば,  $r = |x| \rightarrow \infty$  のとき,  $r^{-(n-1)/2} e^{\pm i\sqrt{\lambda}r}$  という形の球面波が漸近形として現れる. (このように球面波も自由粒子を表しているのである.) 3体問題の球面波とはどのようなものであろうか? 3個の粒子が束縛されずに自由に飛んでいくという (e) の散乱状態ではその球面波は

$$\frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda}r}}{r^{5/2}}$$

である. また2粒子  $a = (i, j)$  が束縛されており3番目の粒子  $k$  が自由に飛んでいくという (a) ~ (d) の状態を表わす球面波は

$$\frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda - \lambda^{a,n}}r_a}}{r_a} \otimes \varphi^{a,n}(x^a)$$

である. ここで  $\varphi^{a,n}(x^a) \in L^2(\mathbf{R}^3)$  は2体 Schrödinger 作用素

$$H^a = -\Delta_{x^a} + V_a(x^a)$$

の固有値  $\lambda^{a,n}$  に対応する固有ベクトルであり, テンソル積  $\otimes$  は関数の積である. 3体 Schrödinger 方程式の固有値問題

$$\left( -\Delta_{x_a} - \Delta_{x^a} + \sum_a V_a(x^a) - \lambda \right) u = 0$$

の解はこのような球面波をすべて含んでおり, それらが完全系となる, ということが物理的に自然な仮定のみから導かれるというのが [17] の内容である.

2.2. 固有函数展開. 次の空間  $B, B^*$  は Agmon-Hörmander [1] によって導入されたものであるが, 3体問題を解析する重要な手段である. このような空間が連続スペクトルの解析に現れることはすでに村田 [28] によって論じられている.  $B$  は次のノルムが有限となる函数  $f$  全体である:

$$\|f\|_B = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} \|f\|_{L^2(\Omega_j)} < \infty,$$

$$\Omega_j = \{x \in \mathbf{R}^n; r_{j-1} < |x| < r_j\}, \quad r_j = 2^j \ (j \geq 0), \quad r_{-1} = 0.$$

$B$  の共役空間は次のノルムが有限となる函数  $u$  全体と同一視される :

$$\|u\|_{B^*} = \left( \sup_{R>1} \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

ポテンシャルに次の仮定をおく :

$$V_a(x^a) = V_a^{(1)}(x^a) + V_a^{(2)}(x^a) \text{ と分解され } V_a^{(1)}(y) \text{ はコンパクトな台を持ち } V_a^{(1)}(y) \in L^2(\mathbf{R}^3), \\ |\partial_y^\alpha V_a^{(2)}(y)| \leq C_\alpha (1 + |y|)^{-|\alpha|-\rho}, \rho > 5, \forall \alpha.$$

この仮定の下で  $H$  の連続スペクトル  $\sigma_{cont}(H)$  は

$$\sigma_{cont}(H) = [\Sigma, \infty), \quad \Sigma = \inf_a \{ \inf \sigma(H^a) \}$$

となる.  $\sigma(H^a)$  は  $H^a$  のスペクトルである.

$H$  に対する一般化された Fourier 変換を構成する.  $N_a$  を  $H^a$  の固有値の個数とし,  $\{\lambda^{a,n}\}_{n=1}^{N_a}$  を  $H^a$  の固有値とする. 上のポテンシャルの仮定の下では  $N_a < \infty$  で  $\lambda^{a,n} \leq 0$  であることが分かっている.

$$\Lambda = \cup_a \{ \lambda_{a,n}; n = 1, \dots, N_a \}$$

を  $H$  の閾値 (thresholds) の集合という. これは散乱状態の性質が変わるエネルギーの値の集合である.

重要なのは次のような無限遠境界上の  $L^2$  空間を導入することである :

$$\mathbf{h} = L^2(S^5) \oplus \left( \oplus_a \oplus_{n=1}^{N_a} L^2(S^2) \right).$$

以下 Banach 空間  $X, Y$  に対して  $\mathbf{B}(X; Y)$  とは  $X$  から  $Y$  への有界作用素全体である. また  $H$  の絶対連続部分空間とは  $H$  のスペクトル分解を  $E(\lambda)$  とするとき  $(E(\lambda)u, u)$  が直線上のルベーグ測度に関する  $\lambda$  の絶対連続函数となるような  $u$  の全体である. 今の場合には, これは  $H$  の固有ベクトルの一次結合全体の直交補空間になっている.

定理 2.1  $\lambda > 0$  に対して定義された有界作用素

$$\mathcal{F}_0(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; L^2(S^5))$$

と, 固有値  $\lambda^{a,n}$  と固有ベクトル  $\varphi^{a,n}$  に依存して定まり  $\lambda > \lambda^{a,n}$  (ただし  $\lambda \notin \Lambda$ ) に対して定義された有界作用素

$$\mathcal{F}_{a,n}(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; L^2(S^2))$$

で次の性質を持つものが存在する.

(1) 任意の  $\varphi_0 \in L^2(S^5)$ ,  $\varphi_{a,n} \in L^2(S^2)$  に対して

$$(H - \lambda)\mathcal{F}_0(\lambda)^* \varphi_0 = 0, \quad (H - \lambda)\mathcal{F}_{a,n}(\lambda)^* \varphi_{a,n} = 0.$$

(2)  $f \in \mathcal{B}$  に対して  $(\mathcal{F}_0 f)(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda)f$ ,  $(\mathcal{F}_{a,n} f)(\lambda) = \mathcal{F}_{a,n}(\lambda)f$  とおけば,  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{a,1}, \dots)$  はユニタリー作用素

$$\mathcal{F} : \mathcal{H}_{ac}(H) \rightarrow L^2((0, \infty); L^2(S^5)) \oplus \left( \oplus_a \oplus_{n=1}^{N_a} L^2((\lambda^{a,n}, \infty); L^2(S^2)) \right)$$

に一意的に拡張される. ここで  $\mathcal{H}_{ac}(H)$  は  $H$  の絶対連続部分空間である.

(3)  $\mathcal{F}$  は  $H$  を対角化する :

$$(\mathcal{F}Hf)(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}f)(\lambda).$$

(4) 任意の  $f \in \mathcal{H}_{ac}(H)$  に対して次の反転公式が成り立つ :

$$f = \int_0^\infty \mathcal{F}_0(\lambda)^* (\mathcal{F}_0 f)(\lambda) d\lambda + \sum_a \sum_{n=1}^{N_a} \int_{\lambda^{a,n}}^\infty \mathcal{F}_{a,n}(\lambda)^* (\mathcal{F}_{a,n} f)(\lambda) d\lambda$$

$\mathcal{F}_0(\lambda) = 0$  ( $\lambda \leq 0$ ),  $\mathcal{F}_{a,n}(\lambda) = 0$  ( $\lambda \leq \lambda^{a,n}$ ) と定義する.  $\mathcal{F}(\lambda) = (\mathcal{F}_0(\lambda), \mathcal{F}_{a,1}(\lambda), \dots)$  とおけば  $\mathcal{F}(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; \mathbf{h})$  であるから  $\mathcal{F}(\lambda)^* \in \mathbf{B}(\mathbf{h}; \mathcal{B}^*)$  である. 次の定理はこの一般化された Fourier 変換によって 3 体問題の連続スペクトルに対応する固有値問題の固有空間がすべて記述されていることを述べている.

**定理 2.2**  $\lambda \in \sigma_{cont}(H) \setminus \Lambda$  のとき  $\{u \in \mathcal{B}^*; (H - \lambda)u = 0\} = \mathcal{F}(\lambda)^* \mathbf{h}$ .

$f(x) \simeq g(x)$  とは

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{|x| < R} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

という意味としよう.

**定理 2.3**  $\lambda \in \sigma_{cont}(H) \setminus \Lambda$  とする.  $u \in \mathcal{B}^*$  が  $(H - \lambda)u = 0$  をみたせば, ある  $\varphi^{(\pm)} = (\varphi_0^{(\pm)}, \varphi_{a,1}^{(\pm)}, \dots) \in \mathbf{h}$  が存在し次の漸近展開が成り立つ :

$$\begin{aligned} u \simeq & C(\lambda) r^{-5/2} e^{i\sqrt{\lambda}r} \varphi_0^{(+)}(\omega) + \overline{C(\lambda)} r^{-5/2} e^{-i\sqrt{\lambda}r} \varphi_0^{(-)}(\omega) \\ & + \sum_a \sum_{n=1}^{N_a} \left[ C_{a,n}(\lambda) r_a^{-1} e^{i\sqrt{\lambda - \lambda^{a,n}} r_a} \varphi_{a,n}^{(+)}(\omega_a) \otimes \varphi^{a,n}(x^a) \right. \\ & \left. + \overline{C_{a,n}(\lambda)} r_a^{-1} e^{-i\sqrt{\lambda - \lambda^{a,n}} r_a} \varphi_{a,n}^{(-)}(\omega_a) \otimes \varphi^{a,n}(x^a) \right]. \end{aligned}$$

ここで  $C(\lambda), C_{a,n}(\lambda)$  は定数であり,  $\omega = x/r$ ,  $\omega_a = x_a/r_a$  である. さらに

$$\varphi^{(+)} = \hat{\mathbf{S}}(\lambda) \mathbf{J} \varphi^{(-)}$$

である. ここで  $\hat{\mathbf{S}}(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathbf{h}; \mathbf{h})$  は S-行列であり,

$$\mathbf{J} : (\psi_0(\omega), \psi_{a,1}(\omega_a), \dots) \rightarrow (\psi_0(-\omega), \psi_{a,1}(-\omega_a), \dots)$$

である.

$r_a^{-1} e^{i\sqrt{\lambda - \lambda^{a,n}} r_a} \varphi_{a,n}(\omega_a) \otimes \varphi^{a,n}(x^a)$  は  $\{x^a = 0\}$  という部分空間の近くに集中している函数である. 上の漸近展開はこのように非等方的なものも導き出している. 3 体系の Schrödinger 作用素の波動関数の性質は勿論, 物理学者によっても解析されている ([31], [30]). 上の定理によりこのような物理的計算を 3 体問題全体の構造の中で適切に解釈できる.

上の定理はこれまで積み重ねられてきた多体問題の定常理論の研究結果を総合して示される. 特に擬微分作用素や Fourier 積分作用素等を用いて Schrödinger 方程式の解を相空間に局所化する方法, いわゆる超局所的方法は重要な役割を果たしている. 2 体問題の場合にはこのことが特に顕著であった. しかし多体 Schrödinger 作用素への超局所的方法の適用は直接的には進まなかった. 最初の大きな進展はレゾルベントに対する極限吸収原理を保障する Mourre による交換子の方法 [27] であった. ついで波動作用素の漸近完全性の問題において, 交換子の方法を精密化し, ユニタリー群  $e^{-itH}$  を交換子を用いて評価するという方法で波動作用素の漸近完全性が得られた. 多体 Schrödinger 作用素のレゾルベントの超局所評価は, 交換子の代数を整備し交換子法を経由して得られた結果を擬微分作用素に翻訳し直すという形で [6] で論じられた. また Helmholtz

型方程式の解の一意性を保障する Sommerfeld の放射条件は Schrödinger 方程式の定常問題で重要な役割を果たすが、この条件の  $N$  体系への一般化は [13] で交換子法を用いて導入され、多体 Schrödinger 方程式の解の一意性が示された。3 体問題に対する  $S$  行列、特に粒子の崩壊を記述する break-up process に対する  $S$  行列の構造は [12] で述べられている。これらの結果を総合した多体系の散乱問題の詳しい解説は [19] にある。

### 3. 多次元逆問題に関する FADDEEV の理論

3.1. 方向に依存するグリーン作用素. 逆問題に移ろう。ここでの話題の中心は 2 体系の高次元逆問題である。  $n \geq 2$  のとき、1.3 節で定義された散乱振幅は次のように書ける。

$$A(E; \theta, \omega) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\sqrt{E}(\theta-\omega) \cdot x} V(x) dx - \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\sqrt{E}\theta \cdot x} V(x) R(E+i0) \left( V(y) e^{i\sqrt{E}\omega \cdot y} V(y) \right) dx. \quad (3.1)$$

ここで  $R(z) = (H - z)^{-1}$  ( $z \notin \mathbf{R}$ ) であり、 $R(E+i0) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} R(E+i\epsilon)$  である。(この極限は適当な位相で存在する。)  $R_0(z) = (-\Delta - z)^{-1}$  とおけば  $R(z) = R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}$  と書ける。 $E \rightarrow \infty$  のとき  $R(E+i0) \rightarrow 0$  となることが分かっている。そこで  $\xi \in \mathbf{R}^n$  に対して  $\theta, \omega \in S^{n-1}$  を  $\sqrt{E}(\theta - \omega) = \xi$  となるように選びながら、 $E \rightarrow \infty$  とすれば

$$\lim_{E \rightarrow \infty} A(E; \theta, \omega) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} V(x) dx$$

となる。よって高次元においては散乱振幅の高エネルギー極限から  $V(x)$  を再構成できる。このことは一見、高次元逆問題が容易であるかのような印象を与えるが、実はこの議論は次のような点で不満足なものである。高エネルギーにおいては非相対論的な Schrödinger 方程式による物理の記述が正しくない。また、1次元の Gelfand-Levitan-Marchenko の理論では与えられた函数があるポテンシャルに対応する  $S$  行列であるための必要十分条件が得られていたのだが、上のような高エネルギー極限だけではそのような  $S$  行列の特徴づけができない。ここに高次元逆散乱問題の大きな困難がある。

1次元逆散乱問題の解決の重要な鍵は Gelfand-Levitan 方程式と呼ばれる Volterra 型の積分方程式であった。Faddeev は Gelfand-Levitan 理論を高次元化するために次のような Green 作用素を導入した：

$$\tilde{G}(\zeta)f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{\xi^2 + 2\zeta \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (3.2)$$

ここで  $\hat{f}(\xi)$  は  $f$  の Fourier 変換であり、 $\zeta \in \mathbf{C}^n$  は  $\zeta^2 = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = E > 0$  をみたす複素パラメータである。この Green 作用素は方程式  $(-\Delta - E)u = f$  において  $u = e^{i\zeta \cdot x} v$  というゲージ変換をして得られる方程式の解作用素である。(3.1) 式が示すように、物理的な散乱振幅はグリーン作用素  $R(E+i0)$  で表示できる。そこで通常用いられる Green 作用素の代わりに Faddeev の Green 作用素を用いて作った散乱振幅を Faddeev の散乱振幅と呼ぼう。Faddeev は物理的な散乱振幅と Faddeev の散乱振幅の間に積分方程式が成立し、それが解けることを示した。この散乱振幅を用いて Faddeev は Gelfand-Levitan 方程式の高次元の類似を導き、 $S$  行列からポテンシャルを求める手続きを示した ([5])。この仕事は多次元逆問題が解けるための作用素の代数的からくりを見事に説明している。しかし途中の評価式が不足しているため議論に形式的なところがあ

て、この仕事をどこまで受け入れていいのがよく分からない。[15] は Faddeev の理論の解説であり、[18] においては今日の段階で Faddeev の議論を正当化できる部分の証明を与えている。

3.2.  $\bar{\partial}$ -理論. Faddeev の散乱振幅は (3.2) から分るように、 $\zeta$  という複素パラメータを含んでいる。それを  $A_F(\sqrt{E}; \theta, \omega, \zeta)$  と書こう。さらに  $\xi = \sqrt{E}(\theta - \omega)$  とおいて  $A_F(\sqrt{E}; \theta, \omega, \zeta)$  を  $T(\xi, \zeta)$  と書く。Nachman [29], Khenkin-Novikov [25] は  $T(\xi, \zeta)$  が  $\zeta$  の函数としては

$$\mathcal{V}_\xi = \{\zeta \in \mathbf{C}^n; |\zeta| > C, \text{Im} \zeta \neq 0, \xi^2 + 2\xi \cdot \zeta = 0\}$$

という複素多様体上の函数とみなされ、この上で

$$\bar{\partial}T(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^n A_j(\xi, \zeta) d\bar{\zeta}_j,$$

$$A_j(\xi, \zeta) = -(2\pi)^{1-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} T(\xi - \eta, \zeta + \eta) T(\eta, \zeta) \eta_j \delta(\eta^2 + 2\zeta \cdot \eta) d\eta$$

という方程式を満たしていることを示した。さらに  $\mathcal{V}_\xi$  上の Bochner-Martinelli 型の積分公式を用いれば  $K(\zeta, \zeta_0)$  を  $\mathcal{V}_\xi$  上の適当な微分形式として

$$\widehat{V}(\xi) = T(\xi, \zeta_0) + \int_{\partial\mathcal{V}_\xi} T(\xi, \zeta) K(\zeta, \zeta_0) + \int_{\mathcal{V}_\xi} \sum_{j=1}^n A_j(\xi, \zeta) d\bar{\zeta}_j \wedge K(\zeta, \zeta_0) \quad (3.3)$$

というポテンシャルの積分表示が得られる。これは次のような意味でも興味深い： $\mathbf{R}^n$  上の函数  $V(x)$  に対して  $V(x) \rightarrow T(\xi, \zeta)$  という fibred space  $\mathbf{R}^n \times \mathcal{V}_\xi$  上の函数を対応させる変換が存在し、(3.3) という反転公式が成り立つ。これは非線形の積分変換の反転公式である。

3.3. 境界値逆問題. EIT (Electrical Impedance Tomography) と呼ばれる医学・工学上の技術がある。 $\mathbf{R}^n$  内に有界な電気伝導体  $\Omega$  を考える。 $\gamma(x)$  を  $\Omega$  の電気伝導度とし、 $u(x)$  を電位ポテンシャルとすれば

$$\nabla \cdot (\gamma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.4)$$

が成り立つ。 $u(x)|_{\partial\Omega}$  は物体表面での電位であり、 $\gamma(x) \partial u / \partial n|_{\partial\Omega}$  ( $n$  は境界の単位外法線ベクトル) は物体表面での電流である。(3.4) に対する境界値逆問題は次のようなものである。境界データの集合

$$\left\{ \left( u|_{\partial\Omega}, \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right); \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \right\} \quad (3.5)$$

から  $\gamma(x)$  を再構成せよ。

$u(x)|_{\partial\Omega}$  を与えれば、(3.4) に対する Dirichlet 問題の解は一意的に定まる。そこで  $u(x)|_{\partial\Omega}$  に  $\gamma(x) \partial u / \partial n|_{\partial\Omega}$  を対応させる写像  $\Lambda_\gamma$  を Dirichlet-Neumann 写像という。 $\Lambda_\gamma$  から  $\gamma(x)$  を求める問題を通常、境界値逆問題と呼んでいる。勿論 Neumann-Dirichlet 写像を用いる定式化も考えられる。 $v = \sqrt{\gamma(x)}u$  とおけば  $v$  は Schrödinger 方程式

$$-\Delta v + qv = 0, \quad q = \frac{\Delta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$$

を満たす。境界値逆問題とコンパクト台をもつポテンシャルに対する逆散乱問題とは同値である。すなわち D-N 写像 から散乱振幅を構成することが出来、逆も可能である。境界値逆問題にも Faddeev の Green 函数は有効であった ([35], [29], [25])。 (3.2) のような Green 函数を用いると



いうことは  $e^{ix \cdot \zeta}$  という指数的に増加する Helmholtz 方程式の解を用いることを意味する. 実はこの函数は Calderón が境界値逆問題を定式化して先駆的な結果を出した時に用いられている.

3.4. 一つのエネルギーからの逆散乱. 上に述べたように現実問題としては逆散乱問題に高エネルギー極限を用いない方がよい. Faddeev の Green 函数を用いる方法のすぐれた副産物として, 入射粒子が一つの固定したエネルギーをもつ場合の逆散乱問題への応用があげられる ([29], [25]). この手法は層状媒質における波動の逆散乱問題 ([14]), 原子核物理における光学模型に対する逆散乱問題 ([24]) などの物理的に重要な問題に応用することができる.

前者が扱うのは  $\mathbf{R}^n$  においてある平面を境に2つの媒質が接しており, しかも波の伝播速度がそれぞれの媒質において異なった定数であるという状況が不連続に摂動された場合の逆散乱問題である. 大気や海洋中ではこのような状況が実際に起こる. また地球内部は層状構造をしているため, 地震波に対する逆問題を考える第一ステップとしてもこの問題は重要である.

後者が扱うのは原子核物理学における多体系の逆散乱問題である. この場合にはたくさんの散乱状態が生ずるのだが多体 Schrödinger 方程式を具体的に解くのは不可能であるため何らかの近似法を導入する必要がある. 光学模型は複素ポテンシャルを導入することによって必要なチャンネルだけを取り出そうとする近似法であるが, 実際の実験データをよく再現し, 今日では原子核物理の基礎的知識として用いられている. 原子核のスピンを考慮することにより, spin-orbit 相互作用という行列型の相互作用をもつ Schrödinger 作用素に対する逆問題になる. しかも実際の問題では相互作用がエネルギーにも依存するため固定したエネルギーからの逆散乱問題を考えることが重要になる. [24] は光学模型において標準的とされる Schrödinger 作用素の一つのエネルギーに対する散乱振幅から相互作用を再構成できることを示したものである.

#### 4. 逆問題と双曲空間

4.1. 双曲空間への埋め込み. 双曲空間が多次元の逆問題を考える手段になり得る, ということが [20] によって指摘された.  $\mathbf{R}^n$  での Schrödinger 方程式

$$(-\Delta + q(x))u = 0 \quad (4.1)$$

の解  $u$  に対して  $v = x_n^{(n-2)/2}u$  とおけば,  $v$  は

$$\left(-x_n^2 \Delta_x + (n-2)x_n \partial_n - \frac{n(n-2)}{4} + x_n^2 q(x)\right)v = 0 \quad (4.2)$$

を満たす. ここで  $\partial_n = \partial/\partial x_n$  である.

$$H_0 = -x_n^2 \Delta + (n-2)x_n \partial_n$$

は双曲空間の上半空間モデル  $\mathbf{H}^n$  の Laplace-Beltrami 作用素である. よってユークリッド空間における Schrödinger 方程式 (4.1) は双曲空間における Schrödinger 方程式 (4.2) とみなすことができる. このことから次のような境界値逆問題の解法が生まれる.  $\mathbf{R}^n$  内の有界領域  $\Omega$  上で (4.1) に対する境界値逆問題を考える.  $\Omega \subset \subset \mathbf{R}_+^n$  と置いてよい. 以下では  $\mathbf{H}^n$  の点を  $(x, y)$ ,  $x \in \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $y > 0$ , と表す.

(Step 1) 変換  $v = y^{(n-2)/2}u$  により  $\mathbf{H}^n$  における境界値問題

$$(H_0 + \tilde{q})v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = f \quad \text{on } \partial\Omega$$

( $\tilde{q} = y^2 q - n(n-2)/4$ ) を考える.

(Step 2)  $\mathbf{R}^{n-1}$  に rank  $n-1$  の lattice  $\Gamma$  をとり  $\mathbf{H}^n$  に平行移動として作用させる.  $\mathcal{M} = \Gamma \backslash \mathbf{H}^n$  を商多様体とする. このとき  $\Gamma$  を十分大きくとれば  $\Omega$  は  $\mathcal{M}$  の一つの coordinate patch に含まれているとしてよい.

(Step 3) パラメータ  $\theta \in \mathbf{R}^{n-1}$  をとり  $u = e^{ix \cdot \theta} v$  とおけば  $u$  は

$$(H_0(\theta) + \tilde{q})u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = e^{ix \cdot \theta} f \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (4.3)$$

$$H_0(\theta) = -y^2(\partial_y^2 + (\partial_x + i\theta)^2) + (n-2)y\partial_y$$

をみます.

(Step 4)  $E > n(n-2)/4$  を任意にとり,  $\Omega$  上で  $V = \tilde{q} + E$ ,  $\Omega^c$  上で  $V = 0$  とおく.  $\mathcal{M}$  においても境界値逆問題と逆散乱問題は同値である. よって (4.3) に対する Dirichlet-Neumann 写像  $\Lambda(\theta)$  から  $H_0(\theta) + V$  に対する物理的散乱振幅  $A(\theta)$  を作ることができる.

(Step 5)  $A(\theta)$  は  $\theta$  に関して解析的であることが分かる. そこで  $\theta$  を虚軸方向に沿って無限遠に近づければ  $V$  の Fourier 変換が得られる.

$H_0(\theta)$  は Floquet 理論 (これは周期的な係数をもつ Schrödinger 作用素に関する基本的な理論である) に現れる作用素であることに注意しよう. 商多様体を考える効用は Step 5 で現れる.  $\mathcal{M}$  での  $H_0(\theta)$  の Green 作用素は変形 Bessel 関数で書かれるのだが,  $\theta$  に関しては分岐点をもっている. lattice  $\Gamma$  が離散的であることにより,  $\theta$  をこれらの分岐点を避けて解析接続できることが重要である. 以上が [20] の主な内容である.

最後の  $V$  の Fourier 変換を求める計算は  $n \geq 3$  の場合にのみ適用できる. 実は 2 次元の Schrödinger 作用素の固定したエネルギーに対する逆散乱問題はユークリッド空間の場合でも未解決である.

4.2.  $\bar{\partial}$ -理論.  $\mathbf{H}^n$  での  $H_0(\theta)$  の Green 作用素は, 上に述べた分岐点の影響によりある  $\bar{\partial}$  方程式をみたすことが示される. これにより (3.3) に類似したポテンシャルの表示公式が得られる ([22]).  $\mathbf{H}^3$  の場合には多様体  $\mathcal{V}_\xi$  に相当するものは複素平面  $\mathbf{C}$  になり, 通常一般化された Cauchy の公式だけでよい.

4.3. 双曲等長写像. 双曲空間の一つの特徴として豊富な等長写像をもっていることがあげられる.

$\mathbf{H}^3 = \mathbf{R}_+^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$  を quaternion で表示する:

$$\mathbf{z} = x_1 \mathbf{1} + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_3 & x_2 \\ -x_2 & x_1 - ix_3 \end{pmatrix}.$$

$\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{C})$  に対して作用

$$\mathbf{z} \rightarrow \beta \cdot \mathbf{z} = (a\mathbf{z} + b)(c\mathbf{z} + d)^{-1}$$

は  $\mathbf{H}^3$  の等長写像を与える. これは測地線を測地線に写す.  $\mathbf{H}^3$  の測地線は  $\{x_3 = 0\}$  に中心を持つ半円, または  $\{x_3 = 0\}$  に垂直な直線である. このことが逆問題で有効な働きをする.

4.4. 包含物の同定問題. 境界値逆問題 (3.4) の例として医療における問題がある. 人体内の組織の電気伝導度は異方性があるのだが, 簡単のために等方性としよう. これは  $\gamma(x)$  がスカラー函数であることを意味している. D-N 写像から  $\gamma(x)$  を求める問題は, 人体表面に電極をおいたときの電流, 電圧のデータから内部の電気伝導度を求めることに相当する. 現実の問題には種々の設定の仕方がある. たとえば乳癌の細胞の電気伝導度は周囲の正常な組織の 4 倍くらいになることが知られている. このような問題においては腫瘍の位置を同定することが重要である. しかも現実的には人体表面の一部分のみに電極をおいて計測データを求めることが行われている. そこで次のような問題を考えよう.

$\mathbf{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) 内の有界領域  $\Omega$  の正常な場合の電気伝導度  $\gamma_0(x)$  が分かっているものとする.  $\Omega$  のある一部分  $\Omega_1$  において電気伝導度が周囲よりも大きいとする:  $\gamma_1(x) > \gamma_0(x)$ . 境界のある一部分にのみ台をもつデータからの計測によって  $\Omega_1$  の位置が同定できるか?

この問題に関しては池島 [11] の重要な貢献がある. それは複素函数論における Mittag-Leffler 函数を利用して 2 次元の場合に  $\Omega_1$  の位置を特定するアルゴリズムである. 上に述べた双曲等長写像を利用して, この問題を 3 次元の場合にも論ずることができるようになった. 論文 [10] において 2, 3 次元共通に適用できる次のような結果を得た.  $\Lambda, \Lambda_0$  を  $\gamma(x), \gamma_0(x)$  に対する D-N 写像としよう.  $x_0$  を  $\Omega$  の凸包の外外部にとり,  $B(x_0, R) = \{|x - x_0| < R\}$  とする. このとき次の定理が成り立つ.  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$  を  $\partial\Omega$  の  $L^2$ -内積とする.

定理 4.1 大きいパラメータ  $\tau > 0$  を含む函数  $u_\tau(x)$  で次の性質を持つものが存在する.

- (1)  $u_\tau$  は方程式  $\nabla \cdot (\gamma_0(x) \nabla u_\tau) = 0$  を満たす.
- (2)  $u_\tau(x)$  は  $x \in B(x_0, R)$  のときは  $\tau$  に関して指数的に増大し,  $x \notin \overline{B(x_0, R)}$  のときは  $\tau$  に関して指数的に減少する.
- (3)  $f_\tau = u_\tau|_{\partial\Omega}$  とおく.  $\overline{B(x_0, R)} \cap \overline{\Omega_1} = \emptyset$  のときは, ある  $\delta > 0$  が存在して十分大きい  $\tau > 0$  に対して  $0 \leq ((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega} < e^{-\delta\tau}$  が成り立つ.  $B(x_0, R) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$  のときはある  $\delta > 0$  が存在して十分大きい  $\tau > 0$  に対して  $((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega} > e^{\delta\tau}$  が成り立つ.

$f_\tau$  は  $B(x_0, R)$  の外では指数的に減少しているから数値計算上は 0 と考えてよい. よって局所的なデータからの計測値  $((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega}$  によって球  $B(x_0, R)$  と  $\Omega_1$  が交わるか否かを判定できることになる. また上の定理は  $\gamma_1(x) < \gamma_0(x)$  ( $x \in \Omega_1$ ) の場合でも (適当な修正の下に) 同様に成立する.

上の函数  $u_\tau(x)$  は近似的に次のように表される.  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^3$  の上半空間の中におき,  $x_0 = 0$  とする. また  $\gamma_0(x) = 1$  とする. このとき

$$u_\tau(x) \simeq \sqrt{\frac{y_3}{x_3}} e^{\tau(-y_1 + i\tau y_3)}, \quad (4.4)$$

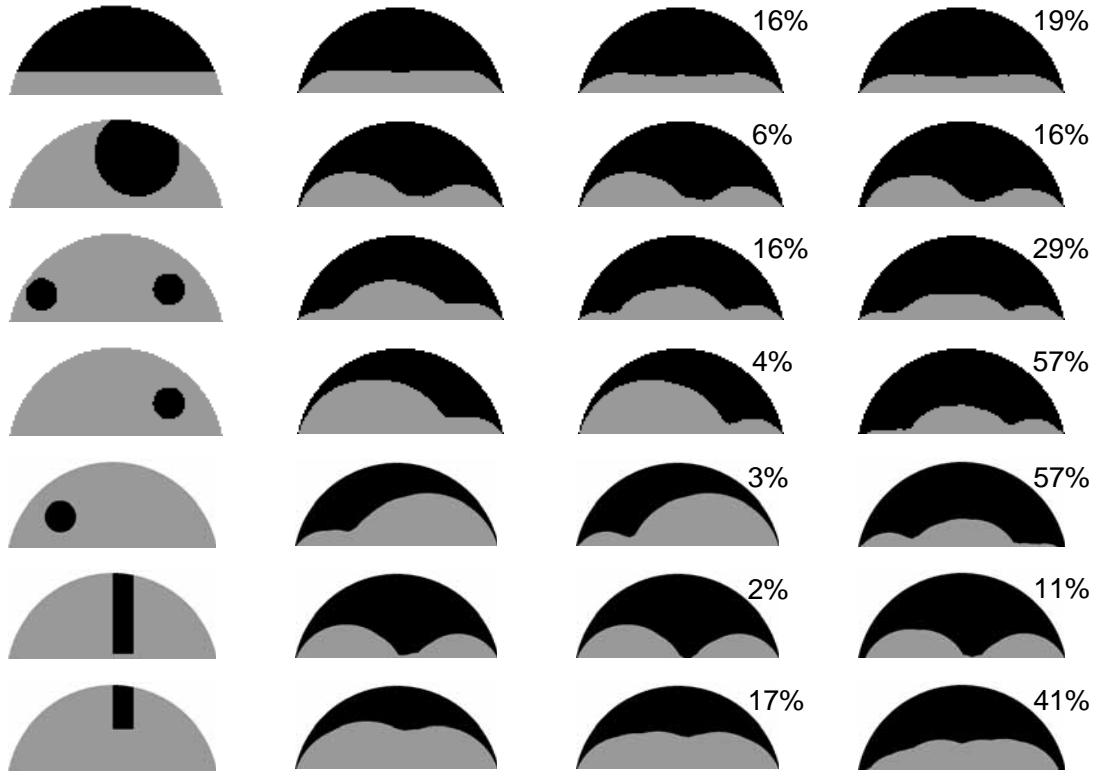
$$y_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2}{(x_1 + R)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_3 = \frac{2x_3 R}{(x_1 + R)^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

このことを用いれば次のような包含物探査のアルゴリズムが考えられる.

- (1) 物体  $\Omega$  を上半空間  $\mathbf{R}_+^3$  に置く.
- (2) (4.4) の右辺の函数を 2 次形式  $Q(\tau) = ((\Lambda - \Lambda_0)f_\tau, f_\tau)_{\partial\Omega}$  に代入する.
- (3) 原点中心, 半径  $R$  の球  $B_R$  を描く.

(4)  $Q(\tau)$  が  $\tau$  と共に増大すれば  $B_R$  は  $\Omega_1$  に交わっているであろう.  $Q(\tau)$  が  $\tau$  と共に減少すれば  $B_R$  は  $\Omega_1$  に交わっていないであろう.

このようにして  $x_0$  を中心とし包含物に接する球面が得られる.  $x_0$  を動かして得られる球面族の包絡面が包含物の形を近似しているであろう. このアルゴリズムに基づいて 2 次元の場合の数値計算を行った. それを以下に図示しよう.

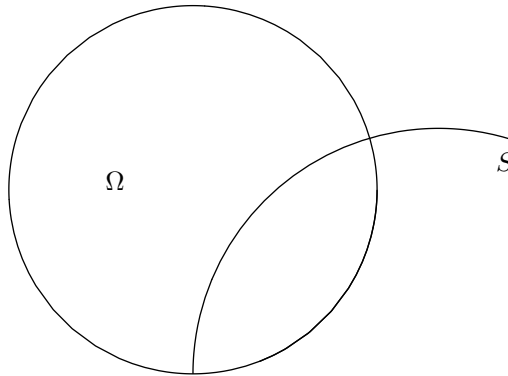


左側の縦列のように半円の中に包含物があるとする. 灰色の部分 (正常部分, あるいは背景部分) の電気伝導度が 1, 黒色の部分 (包含物) の電気伝導度が 4 である. 半円の直線部分 (これを前縁部と呼ぶ) のみに台を持つ境界データを与えて, 境界値問題 (3.4) を有限要素法で解いた解を使い, 前記のアルゴリズムを用いて包含物までの距離を計算した. 縦 2 列目の灰色部分は前縁部に中心をもつ円の族による包絡線の囲む領域である. これが包含物の非存在を幾何学的に推定できる最大の領域である. 左から 3 列目は数値計算による推定 (ノイズのないとき) である. 一番右の列は 0.01 パーセントのノイズをいれたときの数値計算結果である. 3, 4 列の右肩の数字は 2 列目の領域からの誤差である. 浅いところにある包含物は同定しやすいが, 深いところにある包含物は同定しにくい. これは EIT の物理的特性である.

定理 4.1 の証明のアイデアは  $x_0 = 0$  となるように  $\Omega$  を上半空間に埋め込むことにある. 4.3 節で述べた双曲等長変換により, 原点中心半径  $R$  の半球を  $\{x_3 = 0\}$  に垂直な平面  $\{x_2 = 0\}$  に変換できる. このとき双曲空間における Schrödinger 方程式 (4.2) は不変である. ゲージ変換により複素パラメータ  $\theta$  を含んだ方程式 (4.3) を考える.  $\theta = (0, i\tau)$  ととる. 微分作用素  $H_0(\theta)$  のグリーン函数を変形 Bessel 函数を用いて書ける. このグリーン函数を用いて (4.3) の解を構成す

る。ゲージ変換をし直せば、平面  $\{x_2 = 0\}$  の片側で指数的に増大し、反対側で指数的に減少する Schrödinger 方程式の解を構成できる。この解を双曲等長写像で元に戻せばよい。

4.5. **Horosphere 境界値問題 と Barber-Brown algorithm.** 電気伝導度  $\gamma(x)$  自身を再構成する問題に移ろう。  $n \geq 3$  の場合は 1980 年代後半にこの問題の解の一意性と理論的な再構成手続きが示されたのだが ([35], [29], [25]), それは境界値逆問題を散乱の逆問題に変換するものであり、実際の数値計算とはかなりの距離がある。一方 1980 年代の前半に英国の技術者 Barber と Brown によって  $\gamma(x)$  を求めるアルゴリズムが提唱されていた。それは計算コストが小さい割には良い精度の解を与え、現在のところ商業的に実際に用いられているただ一つのアルゴリズムである。さらに興味深いことにこの問題は双曲幾何学に関係があることが Santosa-Vogelius [33] によって指摘されていた。



彼らの議論を簡単に振り返ろう。これは 2 次元円板内での線形化問題である。2 次元単位円板  $\Omega = \{|x| < 1\}$  を考え、 $\gamma(x)$  は定数  $\gamma_0 > 0$  に殆ど近いものであるとしよう：

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \epsilon\gamma_1(x) + \dots$$

点  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \partial\Omega$  を任意にとり  $\omega^\perp = (-\omega_2, \omega_1)$  とおく。

$$u_0(x) = \frac{\omega^\perp \cdot x}{(\omega^\perp \cdot x)^2 + (1 - \omega \cdot x)^2}$$

は  $x = \omega$  に特異点をもつ  $\Delta u = 0$  の解である。方程式  $\nabla \cdot (\gamma(x)\nabla u) = 0$  の解として

$$u(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \dots$$

という形のを想像する。Barber-Brown のアルゴリズム は  $\gamma_1(x)$  が近似的につぎのように書けることを主張するものである：

$$\gamma_1(x) \approx \int_{S^1} \varphi(x, \omega) \rho_1 d\omega.$$

ここで  $\varphi(x, \omega)$  は  $u_1(x)$  から計算されたある函数であり、 $\rho_1$  は適当な密度である。Santosa と Vogelius は  $\varphi(x, \omega)$  が大体次ぎのようなものであることに気がついた：

$$\varphi(x, \omega) \approx K \left( \int_S \gamma_1(x) \rho_2 d\sigma \right).$$

ここで  $K$  はある convolution 作用素であり,  $S$  は  $\partial\Omega$  に直交する円である. 上の 2 つを合わせれば

$$\gamma_1 \approx R^*KR\gamma_1, \quad Rf = \int_S f(x)\rho_2 d\sigma \quad (4.5)$$

という式が成り立つ. ここで  $\Omega$  を Poincaré disc と見做せば  $S$  は測地線であり, (4.5) は Poincaré disc 上での Radon 変換の反転公式と類似している. Berenstein-Tarabushi [3] は Barber-Brown のアルゴリズムを分析し, それが実際に Poincaré disc 上の Radon 変換の反転公式とみなせることを論じた.

これらの仕事は円板上の境界値逆問題が双曲幾何と関係していることを示唆しているように思われる. しかしこれ以上の解析, 特に 3 次元の場合, あるいは線形化しない元の問題 (3.4) との関係等は未知のまま残されていた.

論文 [23] は双曲空間の方法により 3 次元における問題 (3.4) に対する Barber-Brown のアルゴリズムを次のようにして正当化しようというものである. 3 次元球  $\Omega$  の中で Schrödinger 方程式  $(-\Delta + q(x))u = 0$  に対する境界値逆問題を考える.  $\partial\Omega$  に直交する球面  $S$  を考える. このとき

定理 4.2 (1) 大きいパラメータ  $\tau > 0$  を含む  $\partial\Omega$  上の擬微分作用素  $P(\tau)$  が存在し, 境界値問題

$$(-\Delta + q)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = P(\tau)u + f \quad \text{on } \partial\Omega$$

は一意解  $u(\tau)$  をもつ. 一般化された Dirichlet-Robin 写像 (GRD map) を

$$\mathcal{R}_q(\tau) : f \rightarrow u|_{\partial\Omega}$$

によって定義する.

(2) 境界データ  $f(\tau)$  と点列  $\{\tau_n\}$  が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\mathcal{R}_q(\tau_n) - \mathcal{R}_0(\tau_n))f(\tau_n), f(-\tau_n))_{\partial\Omega} = i \int_{S \cap \Omega} q(x) dS$$

が成り立つ.

(3)  $\mathbf{H}^3$  の Disc model での Radon 変換の反転公式によって  $q(x)$  を計算できる.

Disc model の双曲空間での Radon 変換は

$$Rf(\xi) = \int_{\xi} f(x) dS(x)$$

( $\xi$  は境界  $\{|x| = 1\}$  に直交する球面) であり,  $K = SO(3)$ ,  $g \in SO(2, 1)$ ,  $g \cdot o = x$ ,  $o$  は原点,  $\eta$  は  $o$  を通る平面として  $R$  の共役作用素は

$$R^*\varphi(x) = \int_{x \in \xi} \varphi(\xi) d\mu(\xi) = \int_K \varphi(gk \cdot \eta) dk,$$

である. このとき Radon 変換の反転公式とは

$$f = -\frac{1}{2\pi}(1 + \Delta_g)R^*Rf$$

であった. ただし  $\Delta_g$  は  $\mathbf{H}^3$  の Laplace-Beltrami 作用素である.

作用素  $P(\tau)$ , 境界データ  $f(\tau)$ , 点列  $\{\tau_n\}$  はポテンシャル  $q(x)$  によらずに具体的に表示できる.

定理 4.2 の証明のアイデアは  $\Omega$  を次のようにとることである :

$$\Omega = \left\{ (x_1 + R)^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{R}{\delta}\right)^2 < \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \right\}.$$

これは  $\{x_3 = 0\}$  に接する  $\mathbf{R}_+^3$  の中の球, 即ち  $\mathbf{H}^3$  のホ口球である. 4.3 節の双曲等長写像を適当にとればこの球を半空間  $\{x_3 > \delta\}$  に写像できる. そこで Schrödinger 方程式  $(H_0 + q)u = 0$  を半空間  $\{x_3 > \delta\}$  で考えればよい. 以下, 前と同様にゲージ変換をほどこして複素パラメータ  $\theta$  を導入する. 半空間  $\{x_3 > \delta\}$  での  $H_0(\theta)$  に対するグリーン函数を用いて求める解  $u$  を構成する.

4.6. 境界条件の問題. 現実的には EIT の数学的定式化の際には境界条件が重要である. 実際の場合では物体表面におく電極は有限の大きさであり, また電極間にある程度の距離をおかなければ周波数の高い波を使うことはできない. D-N 写像は無限に小さい電極を連続的に並べることに相当するが, この意味では現実から隔たりがあり, 実際のデータと食い違いがある. より実際的な定式化として, gap model, shunt model, complete electrode model 等が提唱されている. 最後の model が最も現実のデータと符合するとされているが, ここでは電極と物体表面との間の作用を考慮するため Robin 境界条件が用いられている ([34]). このことから境界値逆問題の数学的定式化は, 現実と対比させながらさらに研究する余地があるように思われる.

4.7. 結語. 逆問題は ill-posed な問題であると言われる. 小さな観測の誤差が大きな結果の誤差につながる. だからこそ正確な数学的理論が必要である. しかしたとえ現実の問題から出発しても現実の状況を反映させながら理論的解明を行うことは易しいことではない. 境界値逆問題において電気伝導度を再構成することが理論的には可能であることが示されてほぼ 20 年になる. 私見ではあるが, 境界値逆問題は良い数値計算結果を出すという方向に収斂していくのではなからうか? その意味で上に述べた包含物同定問題や Barber-Brown のアルゴリズムの問題に関しては 3 次元の数値計算へと進むのが課題であろう. 多次元の逆問題への関心は近年増大しており, 上に述べたことの他に (あるいはそれ以上に) 重要な貢献が多数ある. 数値計算の方面を概観するのは著者の手に負えることではないが, 理論的な面では例えばコンパクトリーマン多様体上の逆スペクトル問題を解決した Belishev-Kurylev の境界制御法 [2] の重要性は特筆すべきであろう. また非コンパクト多様体上の漸近的雙曲計量に関する逆問題は興味ある問題を含んでいると思われる ([21], [32]). 散乱の逆問題, 境界値逆問題は単なる数学の応用という範疇には収めきれない. それは古典的な数学, 物理の深い流れの中にしっかりとした根を下ろしている.

## REFERENCES

- [1] S. Agmon and L. Hörmander, Asymptotic properties solutions of differential equations with simple characteristics, *J. d'Anal. Math.* 30 (1976), 1-38.
- [2] M. Belishev and Y. Kurylev, To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method), *Comm. in P. D. E.* 17 (1992), 767-804.
- [3] C. A. Berenstein and E. C. Tarabusi, Integral geometry in hyperbolic spaces and electrical impedance tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 56 (1996), 755-764.
- [4] L. D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three Body Problems in Quantum Scattering Theory*, Steklov Institute (1963).
- [5] L. D. Faddeev, Inverse problems of quantum scattering theory, *J. Sov. Math.* 5 (1976), 334-396.
- [6] C. Gérard, H. Isozaki, E. Skibsted,  $N$ -body resolvent estimates, *J. Math. Soc. Japan* 48 (1996), 135-160.
- [7] J. Ginibre and M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three-body problem, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A 21 (1974), 97-145.
- [8] J. Howland, Abstract stationary theory of multichannel scattering, *J. Functional Anal.* 22 (1976), 252-282.
- [9] T. Ikebe, Eigenfunction expansion associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* 5 (1960), 1-34.
- [10] T. Ide, H. Isozaki, S. Nakata, S. Siltanen and G. Uhlmann, Proving for electrical inclusions with complex spherical waves, to appear in *C.P.A.M.*.
- [11] M. Ikehata, Mittag-Leffler's function and extracting from Cauchy data, *Contemporary Mathematics (Inverse Problems and Spectral Theory, ed. H. Isozaki)* 348 (2004), 41-52.

- [12] H. Isozaki, Structures of S-matrices for three-body Schrödinger operators, *Commun. Math. Phys.* 146 (1992), 241-258.
- [13] H. Isozaki, A generalization of the radiation condition of Sommerfeld for  $N$ -body Schrödinger operators, *Duke Math. J.* 74 (1994), 557-584.
- [14] H. Isozaki, Inverse scattering theory for wave equations in stratified media, *J. Diff. Eq.* 138 (1997), 19-54.
- [15] 磯崎 洋, 散乱理論における逆問題, 龍谷大学科学技術共同研究センター (1997).
- [16] 磯崎 洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, *数学* 50 (1998), 163-180.
- [17] H. Isozaki, Asymptotic properties of solutions to 3-particle Schrödinger equations, *Commun. Math. Phys.* 222 (2001), 371-413.
- [18] H. Isozaki, Inverse spectral theory, *Topics in the Theory of Schrödinger Operators*, eds. H. Araki and H. Ezawa, World Scientific (2003), 93-143.
- [19] 磯崎 洋, 多体シュレーディンガー方程式, シュプリンガー東京 (2004).
- [20] H. Isozaki, Inverse spectral problems on hyperbolic manifolds and its applications to inverse boundary value problems in Euclidean space, *Amer. J. of Math.* 126 (2004), 1261-1313.
- [21] H. Isozaki, Inverse problems and hyperbolic manifolds, Contemporary Mathematics 348, *Inverse Problems and Spectral Theory*, ed. H. Isozaki, A.M.S. Providence Rhode Island (2004), 181-197.
- [22] H. Isozaki, The  $\bar{\partial}$ -theory for inverse problems associated with Schrödinger operators on hyperbolic spaces, to appear in *Publ. RIMS Kyoto Univ.* Vol 43, No 1 (2007).
- [23] H. Isozaki, Inverse boundary value problems in the horosphere — A link between hyperbolic geometry and electrical impedance tomography, *Inverse Problems and Imaging* 1 (2007), 55-82.
- [24] H. Isozaki, H. Nakazawa and G. Uhlmann, Inverse scattering problem in nuclear physics, *J. Math. Phys.* 45 (2004), 2613-2632.
- [25] G. M. Khenkin and R. G. Novikov, The  $\bar{\partial}$ -equation in the multi-dimensional inverse scattering problem, *Russ. Math. Survey* 42 (1987), 109-180.
- [26] S. T. Kuroda, Scattering theory for differential operators, I, II, *J. Math. Soc. Japan* (1973), 75-104, 222-234.
- [27] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators, *Commun. Math. Phys.* 78 (1981), 391-408.
- [28] 村田 實, 偏微分方程式の解の無限遠における増大度の下限, *数学* 第 32 卷第 1 号 (1980), 1-16.
- [29] A. Nachman, Reconstruction from boundary measurements, *Ann. Math.* 128 (1988), 531-576.
- [30] R. G. Newton, The asymptotic form of three-particle wave functions and the cross-sections, *Ann. Phys.* 74 (1972), 324-351.
- [31] J. Nuttall, Asymptotic form of the three-particle scattering wave functions for free incident particles, *J. Math. Phys.* 12 (1971), 1891-1899.
- [32] A. Sa Barreto, Radiation fields, scattering, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds, *Duke Math. J.* 129 (2005), 407-480.
- [33] F. Santosa and M. Vogelius, A back projection algorithm for electrical impedance tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 50 (1990), 216-243.
- [34] E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson, Existence and uniqueness for electrode models electric current computed tomography, *SIAM. J. Appl. Math.* 52 (1992), 1023-1040.
- [35] J. Sylvester and G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Ann. Math.* 125 (1987), 153-169.
- [36] L. Thomas, Asymptotic completeness in two and three particle quantum scattering theory, *Ann. Phys.* 90 (1975), 127-165.

いそざきひろし · 筑波大学大学院数理物質科学研究科