【17】

氏名(本籍)	坪井明人(東京都)
学位の種類	理学博士
学位記番号	博甲第276号
学位授与年月日	昭和60年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
審査研究科	数学研究科　数学専攻
学位論文題目	**Independent Partitions and the Number of Countable Models.** **(独立な分割と可算モデルの数)**

主査	筑波大学教授	理学博士	西村敏男
副査	筑波大学教授	理学博士	内山三郎
副査	筑波大学教授	理学博士	杉浦成昭
副査	筑波大学教授	理学博士	本橋信義

論文の要旨

第1階述語論理Lと，Lの中の完全で無限模型をもつ理論T，及びTの十分に大きな模型σを固定する。それぞれの長さがm，kの自由変数列$\bar{x}, \bar{y}$をもつLの論理式$\varphi(\bar{x}, \bar{y})$と，$|\mathfrak{M}|^{\kappa}$の元$\bar{a}$について，$\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$で$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$となる$|\mathfrak{M}|^{n}$の元$\bar{b}$全体の集合を表わすものとする。論理式の集合$\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) \mid i<\omega\}$が分割であるとは，ある自然数nが存在して，集合族$\{\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a}_i) \mid i<\omega\}$の中の任意のn個は共通部分をもたないことである。$\kappa$個の分割$\{\varphi\lambda(\bar{x}, \bar{a}_{i\lambda}) \mid i<\omega\}$，$\lambda<\kappa$，が独立であるとは，$\kappa$から$\omega$へのどんな写像fについても集合$\bigcap_{\lambda<\kappa} \varphi\lambda(\mathfrak{M}, \bar{a}_{f(\lambda)},\ {}_{\lambda})$が空集合にならないことである。また，$|\mathfrak{M}|$の部分集合Aと，$|\mathfrak{M}|^{\kappa}$の元のあつまり$\{\bar{a}_i \mid i \in I\}$について，A上$\{\bar{a}_i \mid i \in I\}$が独立であるとは，各$i \in I$について，タイプ$t(\bar{a}_i, A^{U}\ \{\bar{a}_i\} \mid i \in I, J \neq i)$がA上forkしないこととする。

坪井氏は独立な分割の個数と独立な$|\mathfrak{M}|$の元に関して

定理1．無限基数κについて，次の2条件(i)，(ii)は同値である。

(i)　κより小さい任意の基数λについて，λ個の独立な分割が存在する。

(ii)　κより小さい任意の基数λについて，$|\mathfrak{M}|$の部分集合Aと$|\mathfrak{M}|^{\kappa}$の元$\bar{a}_i(i<\lambda)$，$\bar{b}$で，$\{\bar{a}_i \mid i<\lambda\}$はA上独立になるが，各$\bar{a}_i$はA上$\bar{b}$と独立にならないものがある。

を証明した。$\kappa_{ind}{}^{m}(T)$で上記のような長さκの独立な分割が存在しないような最小の基数をあらわすことにすると，定理1より，

系2．$\kappa^{m}_{ind}(T) = \kappa^{i}_{ind}(T)$ for all $m \in \omega$

が直ちに得られる。したがって，$\kappa^{m}_{ind}(T)$はmによらず定まる。これを$\kappa_{ind}(T)$とあらわすとき，Tがsuperstableとすると$\kappa_{ind}(T)$はωになる。一方，坪井氏は本論文で

定理3．$\kappa_{ind}(T_n)=\omega$となる完全な理論の上昇列$T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_n\subset\cdots$について，その和で得られる理論Tの可算モデルの個数は1または無限である。

を証明した。この事実はA. Lachlanによる次の定理：

Lachlanの定理，Superstableな理論の可算モデルの個数は1または無限である。

の拡張になっている。

審　査　の　要　旨

本論文で扱われている分野は，模型論の中心分野，通常，純粋模型論(Pure model theory)とよばれている分野である。この分野は現在の模型論の中心をなす分野であるが，1960年代の終りから70年代の初頭にかけてShelahにより方法論が提出され，Shelahとその周辺の研究者達によって多くの重要な結果が得られてきた。

坪井氏は，分割についての独立という概念と，個々の元の間の独立という概念を結びつける始めての結果(上記定理1)を証明し，それを用いてShelahによって提出された未解決問題(上記系2)を肯定的に解決した。坪井氏の業績は個々の問題の解決に止まらず，Shelah理論の中心をなす理論－安定性理論－の基本部分を改良するものであり，この分野に新しい方法論を提供していて多くの応用が期待される。上記定理3はその一例である。

坪井氏の手法は大局において従来の手法を継承するものであるが，多くの工夫，改良を含んだものであり，問題解決への有力な手法を提供するもので，今後，模型論の発展に大きく貢献するものと考えられる。

よって，著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものとみとめる。