

剛体リンクモデルによる身体運動シミュレーションシステムの構築と スポーツ運動への応用

藤井 範久・阿江 通良・宮下 憲

Simulation system of human movement based on link segment model and its application to sport movements

FUJII Norihisa, AE Michiyoshi and MIYASHITA Ken

The purposes of this study were to develop the three-dimensional simulation system of human movement based on link segment model, and to demonstrate the applications to sport movements. General differential equations were derived from the link segment model to describe the motion of the model. The equations consisted of the Newtonian equations of motion, the connecting equations between adjacent segments, and the constraint equations of joints which represent the degrees of freedom of joints. Simulation system was applied to the pitching motion and the sprint running motion in order to validate the system developed. Good agreement was achieved between the original pitching motion obtained from video analysis and the motion estimated from the simulation. Simulation results of sprint running suggested that human motion might be modified so that change in power should be minimized. In conclusion, it is suggested that the simulation system developed in this study will serve as an effective tool for teaching and coaching of sport techniques.

Key words : link segment model, three dimensional simulation, degrees of freedom of joint, pitching motion, sprint running

1. はじめに

1.1 研究の背景

競技スポーツにおいて指導者が選手に技術の改善を意図して指導を行う場合、身体の部分的な動きについて指示することがよくある。例えば、陸上競技のスプリント走の場合は、「離地後の下腿の引きつけを素早く」などの指示が行われる。しかし指示された身体部分の動きだけでなく、他の身体部分さらに全身の動きにも影響を及ぼし、その結果、パフォーマンスが低下する場合もある。

この原因には協調動作や反射など様々なものがあるが、力学的には以下のように考えられる。身体運動を能動的に引き起こす要因である筋力

は、関節部において回転トルクを発生すると同時に、関節に作用する力を発生させる要因でもある。関節で発生した力は身体部分を通して他の関節に伝達され、力によるモーメントとして他の身体部分を回転させる。さらに全ての身体部分は関節で相互に連結されているため、力学的な連鎖が存在することになる。そのため変更を意図した身体部分の動きだけでなく他の身体部分の動きも変化すると考えられる。したがって、例えば、スプリント走において下腿の動きに問題がある選手に対して腰の動きを指導することによって、下腿の動きのみに着目して指導する場合より効果的にフォームの改善を行うことができるとも考えられる。し

かし身体の一部の動きに対する指示が身体全体の動きにどのような影響を及ぼすかについては明らかにされているとは言えないようである。

1.2 身体運動の力学的解析とコンピュータシミュレーション

身体運動は多数の骨格筋が協働また拮抗しながら、多数の関節を回転させることによって生じていると考えることができる。競技スポーツの指導においては、どのようにすれば動きが改善され、競技成績を向上させることができるかが重要な課題となろう。そのためには上述した力学的連鎖を考慮した上で、身体の一部の動きの変化が身体全体の動きにどのような影響を及ぼすかについて明らかにすることが役立つであろう。

身体運動を力学的に解析する方法の一つに、剛体リンクモデルや筋骨格モデルによる逆動力学的解析がある。これは身体各部の運動方程式から逆動力学問題を解くことにより、身体に作用する力、トルクを推定するものである¹⁾。しかし運動を力学的に解析するだけでは、上述したような身体部分と全体の動きとの関係を明確にすることはできないであろう。

このような身体部分間の力学的連鎖関係を明らかにする一つの手法として、コンピュータによる身体運動のシミュレーション手法がある。これまで行われてきた身体運動のシミュレーション手法は、仮想的な運動を入力情報とするものと、関節トルクや筋力を入力情報とするものの2種類に大別できる。前者は、さらに、運動の変化が関節トルクやパワーに及ぼす影響を明らかにしようとするもの⁷⁾と、角運動量保存則をもとに特定の身体部分の運動の変化が全身の運動に及ぼす影響を明らかにするもの^{3,10)}に分けることができる。また後者は、身体部分の運動方程式や筋収縮モデルの特性方程式を順動力学問題として解くことにより、身体運動をシミュレートするものである^{5,9)}。いずれの手法においても、実際に運動を行うことなしに様々な力学的解析を行うことができる点がシミュレーション手法の特徴である。

本研究の目的は、上述した2種類のシミュレーション手法を統合した剛体リンクモデルによる3次元身体運動シミュレーションシステムを構築すること、およびシステムのスポーツ運動への応用例を示すことである。本システムは、特定の身体

部分に関しては仮想的な運動情報を入力し、同時に関節トルクの時系列データも入力情報とするシミュレーションシステムである。これにより、特定の身体部分の運動を意識的に変化させた場合に、力学的連鎖を考慮した上で他の身体部分の運動がどのように変化するかを推定することができる。ただし本システムは、四肢の協調動作や反射の影響を考慮せず、力学的影響のみを明らかにするものである。

2. 剛体リンクモデルによる身体運動のシミュレーションシステム

2.1 シミュレーションシステムの特徴

剛体リンクモデルによるシミュレーションのスポーツ運動への応用を考えたとき、様々な運動に対応できる必要がある。そこで本シミュレーションシステムでは、モデル定義ファイル⁴⁾を作成することによって、後述する運動方程式や関節の運動自由度に関する制約式を自動的にコンピュータ内で連立微分方程式として定式化できるようにしている。これにより、2次元の部分モデルや3次元全身モデルを、コンピュータプログラムを修正することなしに構築することができる。なおシミュレーションシステムは、FORTRAN言語を用いて作成されている。

以下では、剛体リンクモデルの運動方程式および関節の運動自由度に関する制約式、さらに仮想的な運動情報を入力するための条件式を導出し、導出した方程式（以降、これらの方程式をまとめてシミュレーション方程式と呼ぶ）の解法について説明する。

2.2 剛体リンクモデルの運動方程式

図1に示すように一つの剛体要素*i*に関節力、関節トルク、重力が作用している場合、ニュートン-オイラー（Newton-Euler）の運動方程式は式(1)および式(2)で表すことができる。

$$\mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{F}_{i,i+1} - \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{a}_i \quad (1)$$

$$\mathbf{T}_{i-1,i} - \mathbf{T}_{i,i+1} + \mathbf{V}_{i,i-1} \times \mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{V}_{i,i+1} \times \mathbf{F}_{i,i+1} = \mathbf{M}_i^{\text{rot}} \quad (2)$$

ここで式(2)右辺の $\mathbf{M}_i^{\text{rot}}$ は、剛体要素の角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ および角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ で表されるモーメントである（詳細は付録参照⁶⁾）。

さらに図2に示すように隣接する剛体要素が関節で接続されている場合、隣接する剛体要素の重

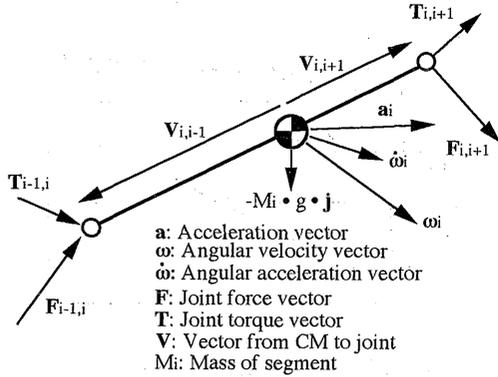


Fig. 1 Forces and torques acting on i-th segment.

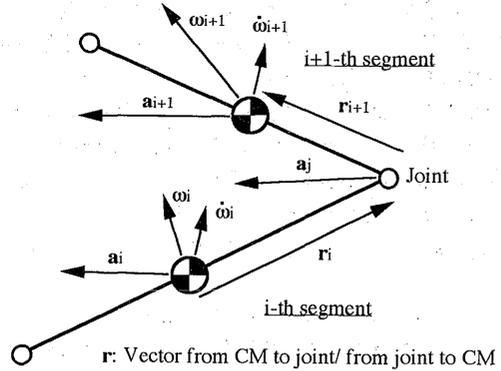


Fig. 2 Relationship between adjacent segments.

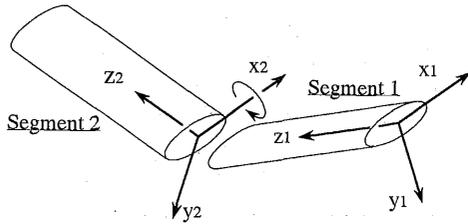


Fig. 3 Definition of constraint axis of the segment. Segment 2 can rotate about only x2-axis.

心加速度，角加速度の間には式(3)（以降，これを連結方程式と呼ぶ）が満足されなければならない。

$$a_{i+1} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_i + \omega_i \times (\omega_i \times r_i) + \dot{\omega}_{i+1} \times r_{i+1} + \omega_{i+1} \times (\omega_{i+1} \times r_{i+1}) \quad (3)$$

2.3 関節の運動自由度の定式化

前説で導出した運動方程式および連結方程式は，解剖学的な関節の運動自由度を考慮したものではない。そこで関節の可動軸が限定されている場合，そのまわりに部分の回転が生じない軸を制約式として定式化する（以降，この軸を関節の拘束軸と呼ぶ）。

例として，図3に示すように剛体要素に固定した動座標系を設定し，剛体要素2が剛体要素1に対して軸 x_2 回りにしか回転することができない（屈曲・伸展運動しかできない）場合を考える。動座標系の各軸に平行な単位ベクトルを U_{x1} 等で表すと，拘束軸は， U_{x1} と U_{z2} のベクトル積で与えられる軸，および U_{x2} と U_{z1} のベクトル積

で与えられる軸になる。これらの拘束軸を定義するためには， U_{x1} と U_{z2} ， U_{x2} と U_{z1} のなす角度がともに $\pi/2$ （ π は円周率）になるようにすればよい。そこで拘束軸を表す制約式は，式(4-1)，(4-2)で表すことができる。

$$\begin{aligned} \ddot{U}_{x1} \cdot U_{z2} + U_{x1} \cdot \ddot{U}_{z2} + 2 \times (\dot{U}_{x1} \cdot \dot{U}_{z2}) &= 0 \\ \ddot{U}_{x2} \cdot U_{z1} + U_{x2} \cdot \ddot{U}_{z1} + 2 \times (\dot{U}_{x2} \cdot \dot{U}_{z1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \omega \times U \\ \ddot{U} &= \dot{\omega} \times U + \omega \times (\omega \times U) \end{aligned} \quad (4-2)$$

なお，この制約式は，角度の2階微分値を規定しているのみで，初期条件における角度が $\pi/2$ でない場合や角速度が0でない場合には，拘束軸を定義していないことに注意しなければならない。

2.4 仮想的な運動情報の導入

仮想的な運動情報を入力する場合，剛体要素の絶対角度，剛体要素の相対角度である関節角度，関節や四肢端の絶対座標値などの運動情報を規定することになる。本研究では，入力する運動情報の時間による2階微分値をシミュレーションの際の拘束情報として与えることにより身体の仮想的な運動を規定する。例えば，図4(a)に示すような剛体要素の角度を仮想的な運動情報として入力する場合，図4(c)に示すような時間による2階微分値である角加速度を拘束情報として用いる。この角加速度を時間積分することにより，図4(b)に示す角速度が得られ，さらに時間積分することにより仮想的な角度を入力することと同時に，すなわち剛体要素の角度や関節角度を入力

する場合には、図2における角加速度 $\dot{\omega}$ や隣接する剛体要素の角加速度の差 $\dot{\omega}_{i+1} - \dot{\omega}_i$ を拘束情報(2階微分値)と一致させる。また関節点や身体の端点の運動を入力する場合には、剛体要素の重心加速度と角加速度から式(5)を用いて関節点や身体の端点の加速度 a_j を導出し、この a_j を拘束情報(2階微分値)と一致させる。

$$a_j = a_i + \dot{\omega}_i \times r_i + \omega_i \times (\omega_i \times r_i) \quad (5)$$

2.5 シミュレーション方程式の解法

まず、仮想的な運動情報を考慮しない場合について述べる。この場合、全ての剛体要素について運動方程式(1)および(2)を、全ての関節について連結方程式(3)を導出する。これらの式を静止座標系におけるXYZ成分に分解すれば、それぞれ3つの式を得る。また関節の拘束軸について制約式(4)を導出する。これらの連立方程式に入力する情報は、定数として剛体要素の長さ、質量および慣性モーメント、初期条件として剛体要素の重心速度、角度および角速度、剛体リンクモデルの運動を能動的に引き起こす要素として関節トルクおよび外力の時系列データである。一方、未知数は全ての剛体要素について重心加速度および角加速度のXYZ成分、全ての関節について関節力のXYZ成分、拘束軸回りの関節トルク(以降、これを拘束トルクと呼ぶ)である。その結果、方程式の数と未知数の数は一致し、シミュレーションに必要な剛体要素の加速度、角加速度を算出することができる。そこで本システムでは4次のルンゲクッタ法を用いて運動方程式、連結方程式、制約式を連立させて解き、剛体リンクモデルのシミュレーションを行う。なお関節の拘束軸回りに作用する拘束トルクは、運動によって受動的に発生するトルクである。そこで本システムでは拘束トルクを未知数として扱っている。

次に、仮想的な運動情報を考慮する場合、入力する運動情報の数だけ未知数が減少し、未知数の数に比べて方程式の数の方が多くなる。そこで本シミュレーションでは関節トルクや外力を変更することとし、その変化量を新たな未知数とすることにより方程式の数と未知数の数を一致させる。同時に複数の関節トルクや外力を変更することによって仮想的な運動を行うことも可能であるが、入力する運動情報の数より変更する関節トルク等の数が多い場合には不静定問題となる。この場合

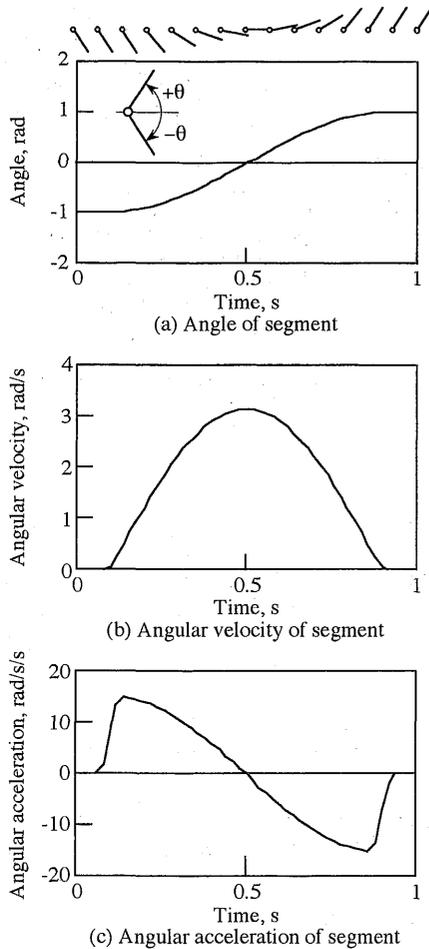


Fig. 4 Constraint by imaginary angle of segment. Time history of angular acceleration is input to equations of motion.

は、例えば『関節トルクの変化量の二乗和を最小にする』などの目的関数を導入し、シミュレーションの各時刻において最適化を行うことによって解を求める。

ここで、どの関節の関節トルクや外力を変更するか、また不静定問題になる場合には、どのような目的関数を設定するかは、対象とする運動や被験者の特性によって決まる方策(strategy)と考えることができる。

3. スポーツ運動への応用例

3.1 投動作の3次元シミュレーション

シミュレーションシステムの妥当性を確認するために、野球の投動作の3次元シミュレーションを行った。図5に示すような上腕、上腕、前腕からなる3要素の剛体リンクモデルを構築した。

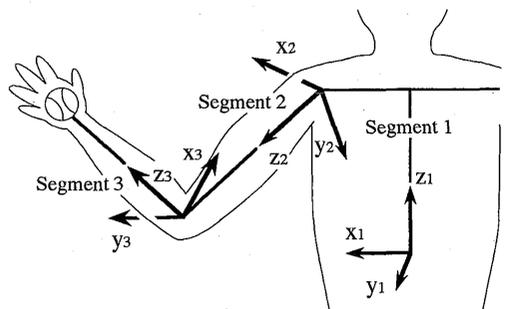


Fig. 5 Three-segment model for pitching motion. Each coordinate is fixed to each segment.

ボールは前腕の遠位端（手首部）に付着しているものとした。また図5に示すように、各剛体要素に動座標系を設定した。動座標系の z 軸は剛体要素の近位端から遠位端へ向かう方向とした。 x 軸は、上腕においては身体左側から右側へ向かう方向、上腕においては上腕の z_2 軸方向のベクトルと前腕の z_3 軸方向のベクトルのベクトル積によって決定される方向、前腕においては尺骨茎状突起から橈骨茎状突起へ向かう方向とした。 y 軸は、各要素について x 軸と z 軸とともに右手系の直交座標系を構成するように決定した。

肘関節は屈曲・伸展運動のみを行う1軸性関節であるが、前腕の回内・回外運動を肘関節の運動としてとらえ、肘関節を2軸性関節として扱う。したがって、上腕の x_2 軸と前腕の z_3 軸に平行な単位ベクトルのベクトル積が、肘関節の拘束軸に平行な単位ベクトルになる。身体部分パラメータは、阿江ら²⁾の係数を用いて推定した。

シミュレーションの初期条件、すなわち剛体要素の角度と角速度、ならびに3次元の関節トルクの時系列データは、実際の投動作を2台の高速度ビデオカメラ（毎秒200コマ、露出時間1/2500秒）で撮影し、DLT法により3次元座標値に変換したものから算出した。フィルタリングおよび微分処理は5次のスプライン関数¹¹⁾を用いて行った。フィルタリングの遮断周波数は約8 Hzであった。なお、ここでは仮想的な運動情報を入力せず、撮

影から得られた投動作を再現することを目的とした。

3.2 スプリント走における遊脚のシミュレーション

3.2.1 スプリント走実験

対象とした運動は100 mスプリント走における下肢の運動である。片脚について離地瞬間から接地瞬間までをシミュレーションの対象とした。

シミュレーションに先立ち、実際のスプリント走の実験を行った。大学男子短距離選手1名に通常のスプリント走（以降、これを固有走と呼ぶ）と、4つの条件で下肢の運動を強調したスプリント走を行わせ、高速度ビデオカメラで被験者の側方からフォームを撮影した。4つの条件とは、(a)脚のリカバリーを早く（脚が流れないように）して走る、(b)足（脚）の巻き込みを強調して走る、(c)脚の振り下ろしを強調して走る、(d)もも上げを強調して走る、である。撮影は毎秒250コマ、露出時間1/2500秒で行い、実長換算したものからシミュレーションの初期条件と関節トルクの時系列データを算出した。フィルタリングおよび微分処理は投動作と同様である。

3.2.2 シミュレーションモデル

下肢を股関節、膝関節、足関節で分割し、2次元の3要素剛体リンクモデルを構築した。2次元平面内でのシミュレーションを行う場合、関節の拘束軸に関する方程式が不要になる以外は3次元空間内でのシミュレーションと同じである。身体部分パラメータは、阿江ら²⁾の係数をもとに算出した。なお、本モデルでは関節の可動範囲は考慮していない。

3.2.3 シミュレーション条件

実験の結果、条件(d)「もも上げを強調して走る」（以降、これをもも上げ走と呼ぶ）に最も明確な動きの変化が見られた。そこで、もも上げを強調することによって下肢の運動がどのように変化するかをシミュレーションによって推定することにした。

固有走の離地瞬間の下肢各部の角度、角速度を初期条件とし、固有走から得た関節トルクを基本の時系列データとして入力した。仮想的な運動情報は次のように設定した。すなわち図6に示すように、固有走の大腿角度が離地後徐々にもも上げ走の大腿角度に近く（大腿を高く上げるように）

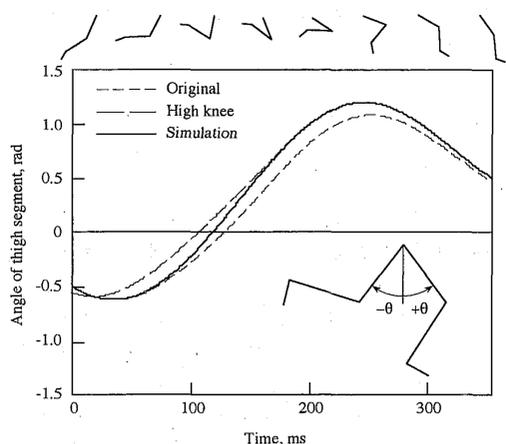


Fig. 6 Angle of thigh segment. Angle history represented by solid line is assumed during swing phase of sprint running in simulation.

なり、回復期後半ではもも上げ走の場合と一致する運動を想定した。足部角度については、固有走の足部角度と常に一致する運動を想定した。シミュレーションにおける接地瞬間は、足先の鉛直方向座標値が設定した値より小さくなった瞬間とした。

シミュレーション条件は、変更する関節トルク、外力（ここでは股関節における関節力）や目的関数によって表1に示す6条件を設定した。条件1から条件4については、膝関節トルクと足関節トルク、股関節トルクと足関節トルク、股関節における関節力の水平分力と足関節トルク、股関節における関節力の鉛直分力と足関節トルク、をそれぞれ変更するものとした。これらの4条件においては、変更する関節トルクおよび股関節における関節力の数が2であるため、静的にシミュレーション方程式を解くことができる。条件5および条件6については、全ての関節トルクおよび股関節における関節力を変更するため、トルクとパワーの変化量の二乗和が最小になるような目的関数を設定した。

Table 1 Conditions of simulation for the swing leg.

Condition	Modification of input data	Objective function
1	knee torque, ankle torque	
2	hip torque, ankle torque	
3	horizontal force of hip joint, ankle torque	
4	vertical force of hip joint, ankle torque	
5	hip torque, knee torque, ankle torque, horizontal and vertical hip joint force	minimizing torque squared
6	hip torque, knee torque, ankle torque, horizontal and vertical hip joint force	minimizing power squared

Table 2 Stride length, time from totoff and touchdown, and velocity of the toe at touchdown. Symbols ↑ and ↓ show increase or decrease of each parameter in comparison with original condition.

Condition	Stride length, m	Time from totoff to touchdown, ms	Velocity of toe, m/s
Original	4.52	352	5.20
High knee	4.68 ↑	356 ↑	6.35 ↑
1	-	-	-
2	4.52 -	354 ↑	5.59 ↑
3	4.25 ↓	355 ↑	5.06 ↓
4	4.73 ↑	361 ↑	5.62 ↑
5	4.47 ↓	362 ↑	6.62 ↑
6	4.61 ↑	367 ↑	6.99 ↑

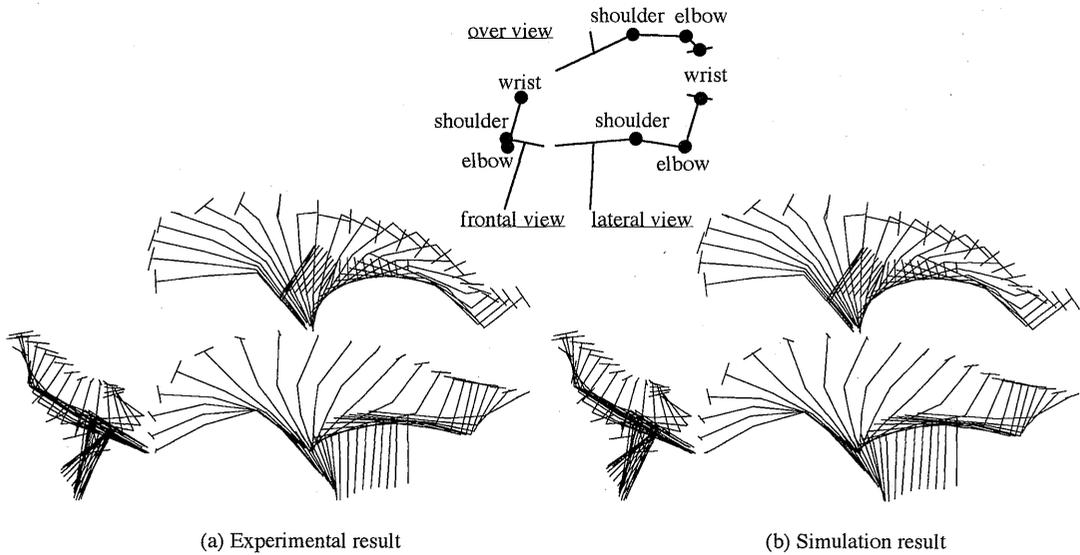


Fig. 7 Stick figures of pitching motion.

4. シミュレーション結果および考察

4.1 投動作の3次元シミュレーション結果

図7に撮影から得た投動作およびシミュレーションから得た投動作をスティックピクチャーとして示す。図7(a), (b)において、左図は投球方向から見たもの、右上図は上方から見たもの、右下図は左側方から見たもので、10ms間隔で示している。また前腕の回内・回外を表すため、前腕遠位端に尺骨茎状突起と橈骨茎状突起を結ぶ線分を付加した。シミュレーションにより再現した投動作は実際の投動作をほぼ再現しており、本研究で構築した3次元身体運動シミュレーションシステムに問題がないことが確認できる。

4.2 スプリント走における遊脚のシミュレーション結果

図8に実験およびシミュレーションから得た結果をスティックピクチャーとして示す。図(a)は固有走、図(b)はもも上げ走の実験結果を示している。図(c)から図(h)は、それぞれ条件1から条件6のシミュレーション結果を示している。条件1(図(c))の場合、関節の可動域を考慮していないため、回復期後半で下腿が本来の可動域を越えて回転しており、膝関節と足関節の関節トルクを変更するだけでは大腿を高く上げて走ることが

できないことが分かる。しかしこの条件1を含めて全ての条件において、回復期後半において大腿部の角度変化はもも上げ走の角度変化と一致しており、大腿部の仮想的な運動を再現している。

図9に股関節を基準にした際の足先の軌跡と接地時の速度(進行方向に対して逆向きを正)を示す。表2にストライド、離地から接地までの時間、ならびに前述の足先の速度を示す。表中の矢印は、固有走と比較した際の増減を示している。表中の矢印を基準に定性的にもも上げ走と類似したシミュレーション条件を挙げると、条件4と条件6になる(全ての項目が増加)。しかし条件4は、接地時に膝が過伸展状態になり大きなブレーキ力が発生し、膝関節に大きな衝撃力が作用すると考えられ、実際のスプリント走を再現しているとは言いがたい。他方、条件6については、接地時の下腿角度は適切であるが、定量的には表2に示した値はもも上げ走と一致しない。特に離地から接地までの時間および足先の速度については、実験から得られた値と大きく異なる。これは離地瞬間の下腿角度や角速度が異なっていることも一つの原因と考えられる。しかし、金子ら⁸⁾は、走動作ではパワーが最小になるように下肢の運動が制御されている可能性があるとしており、スプリント走でもパワーの変化量が最小になるようにも上

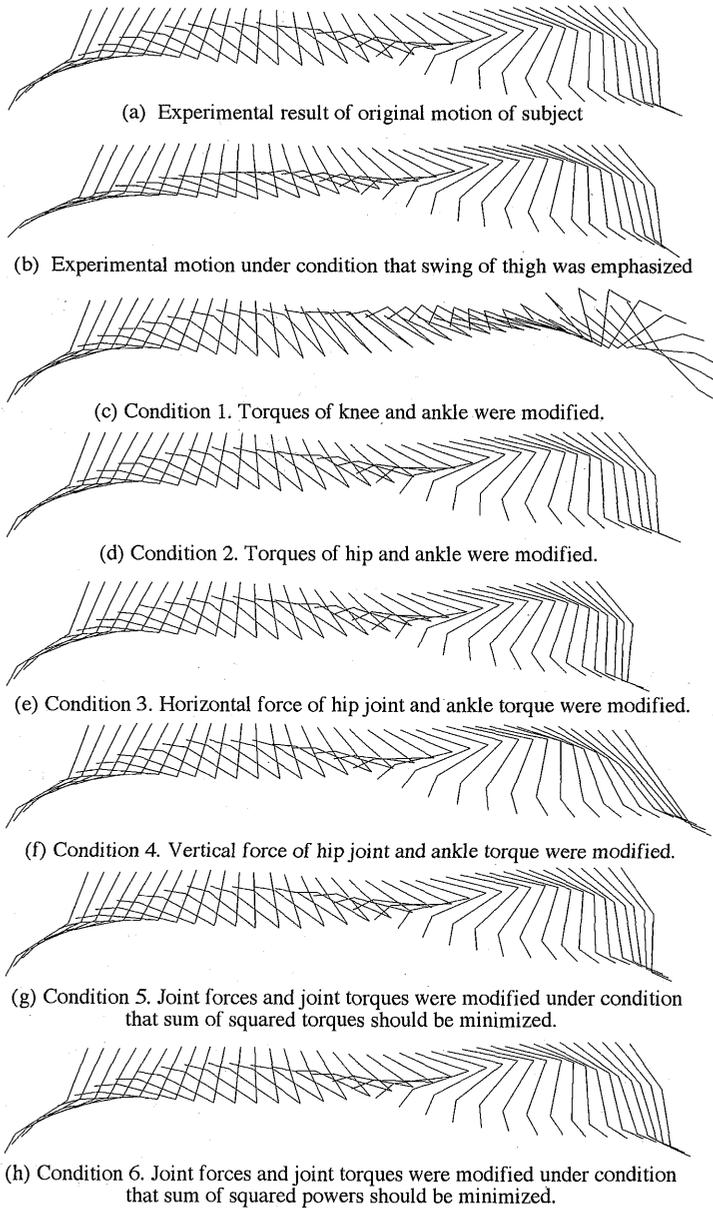


Fig. 8 Stick pictures of swing leg.

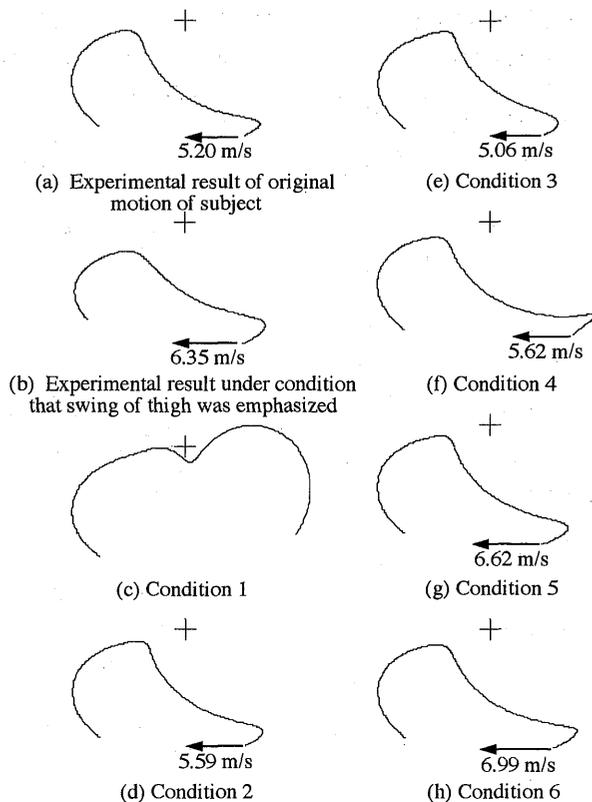


Fig. 9 Pathway and velocity of the toe relative to the hip joint. Symbol + indicates hip joint.

げを強調していると推測することもできるであろう。今後、四肢の協調動作や反射の影響を考慮し、走動作の1サイクルにわたるシミュレーションを行うことによって走速度の変化についても検討できるようにになれば、選手の strategy に合わせた最適なフォームを示唆することも可能になると考えられる。

5. まとめ

本研究では、特定の身体部分の運動を意識的に変化させたときに他の身体部分の運動がどのように変化するかを推定するため、剛体リンクモデルによる3次元身体運動シミュレーションシステムを構築した。構築したシステムを用いて投動作の3次元シミュレーションおよびスプリント走の2次元シミュレーションを行い、システムの妥当性を検討した。その結果、構築したシステムは、スポーツ運動の力学的シミュレーションを行うのに

有効であることが示唆された。しかし、本研究で構築したシステムは、力学的観点から身体運動を扱ったものであり、今後、より現実に近いシミュレーションを行うためには、四肢の協調性や様々な反射も考慮して身体運動を正確に予測する必要がある。

本研究の一部は、平成6年度筑波大学学内プロジェクト研究費の助成を得て行われたものである。本研究で用いた投動作の3次元座標データは、筑波大学体育科学研究科宮西智久氏より提供していただいた。また、スプリント走の実験は、筑波大学陸上競技部の協力を得て行われた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 阿江通良, 宮下 憲, 横井孝志, 大木昭一郎, 洪川侃二 (1986) : 機械的パワーからみた疾

走における下肢筋群の機能及び貢献度。筑波大学体育科学系紀要 9 : pp. 229-239.

2) 阿江通良, 湯海鵬, 横井孝志 (1992) : 日本人アスリートの身体部分慣性特性の推定。バイオメカニズム 11, 東京大学出版会 : pp. 23-33.

3) Dapena J (1981) : Simulation of modified human airborne movements. J Biomech 14 : pp. 81-89.

4) Fujii N (1989) : A general simulation system of two-dimensional multi-link model of human body. (Eds.) Gregor RJ, Zernicke RF, and Whiting WC (In) Proceedings of XII International Congress on Biomechanics. International Society of Biomechanics, USA : #296.

5) 藤井範久, 森脇俊道 (1992) : 垂直跳び動作と人体の形態的特徴に関する研究—付加重量が垂直跳び動作に与える影響—. バイオメカニズム学会誌 16 : 328-337.

6) 原島 鮮 (1972) : 力学 I—質点・剛体の力学—. 裳華房, 東京 : pp. 202-224.

7) Iwata K, Moriwaki T, Shirase K, Misaki N, and Nomura H (1983) : Evaluation of 3-dimensional motions in loading operations based on computer simulation. Mem of Faculty of Eng Kobe University, 30 : pp. 19-33.

8) 金子靖仙, 小川雅史 (1994) : 軌道計画法による走動作の最適化。第12回日本バイオメカニクス学会大会プログラム : pp. 36.

9) Pandy MG and Zajac FE (1991) : Optimal muscular coordination strategies for jumping. J Biomech 24 : pp. 1-10.

10) 湯海鵬, 熊本水頼, 阿江通良 (1992) : 跳馬における空中回転局面のシミュレーション。バイオメカニズム 11, 東京大学出版会 : pp. 123-131.

11) Woltring HJ (1986) : A fortran package for generalized, cross-validatory spline smoothing and differentiation. Adv Eng Software 8 : pp. 104-107.

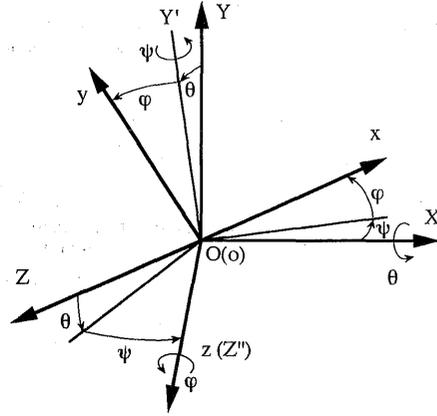


Fig. A1 Definition of Eulerian angles θ , ψ , φ

付録 剛体要素に作用するモーメントの算出⁶⁾

付図 A 1 に示すように静止座標系 (O-XYZ) と剛体要素に固定された動座標系 (o-xyz) を設定し、オイラー角を定義する。オイラー角は様々な定義の方法があるが、ここでは静止座標系における各軸の方向ベクトルを、X 軸回りに θ 、Y' 軸回りに ψ 、Z'' 軸回りに φ だけ順番に回転させた場合に方向ベクトルが動座標系の各軸と一致する時、回転角度 (θ , ψ , φ) をオイラー角として定義する。オイラー角を用いれば、動座標系における剛体要素の回転角加速度 $\dot{\omega}_i$ は、式 (付-1) で表すことができる。

また動座標系の各軸を剛体要素の慣性主軸と一致させておけば、慣性テンソル I_i は主慣性モーメントだけで表すことができる。その結果、 $I_i \cdot \dot{\omega}_i$ は動座標系における M_i^{rot} を表すことになる。そこで $I_i \cdot \dot{\omega}_i$ に式 (付-2) で示す座標変換行列を乗じることにより、静止座標系における M_i^{rot} を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\psi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi \cdot \cos\psi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\psi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cdot \cos\psi & -\cos\varphi \cdot \sin\psi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \cdot \cos\psi & \sin\varphi \cdot \sin\psi \\ 0 & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \cdot \psi \\ \dot{\theta} \cdot \psi \end{bmatrix} \quad (\text{付-1})$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\varphi & -\cos\psi \cdot \sin\varphi & \sin\psi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi + \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi & -\sin\theta \cdot \cos\psi \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi - \cos\theta \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi & \sin\theta \cdot \cos\varphi + \cos\theta \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi & \cos\theta \cdot \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{付-2})$$