創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

—大学での学びにつながる数学教材（「集団の特徴をつかむ」「関数の微小な変化をとらえる」）の完成と普及—

（３年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
鈴木清夫・更科元子・駒野　誠・深瀬幹雄
牧下英世・町田多加志・松嵜昭雄

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

—大学での学びにつながる数学教材（「集団の特徴をつかむ」「関数の微小な変化をとらえる」）の完成と普及—

（3年計画の1年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
鈴木清夫・更科元子・駒野　誠・深瀬幹雄
牧下英世・町田多加志・松嵜昭雄

要約

SSH研究に連動して行った卒業生アンケートから『統計』と『微分方程式』の重要性が浮かび上がった。実際大学に入学すると、『統計』の考えはどの分野に進んでも必要不可欠であり、『微分方程式』は理系では当然のように用いられている。これら2つの基本的な概念を高校以前に学習することは重要であると考え、昨年開発し実践した具体的教材をもとに、他の分野の指導内容も踏まえて、これらについてのカリキュラムを開発する。

また、SSH事業に関連して、魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生に実施していただいている。生徒の科学離れ・数学離れを防ぎ学習意欲を喚起するために、これらの内容を授業に取り込むような教材についても研究開発する。

キーワード：統計，微分方程式，数学特別講座

1　はじめに

ゆとり教育、学校週5日制などの実施とともに、生徒の学習意欲の減退、学力低下などが社会で問題になり、多くの大学で高校の学習内容を扱う補習授業が行われている。中学・高校での学習内容の削減や変更はその原因の一つであろうが、高校での授業も教科書の内容を教えることやそれを理解させる指導に追われて，学習内容の発展や大学で学ぶ内容とのつながりをあまり考えずに学習指導をしていた感は否めない。

そこで本校数学科では，スーパーサイエンスハイスクール(SSH)研究に連動して筑波大学の数学関係者及び他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会で必要となる数学の内容を探るアンケートを卒業生に実施した。その分析検討から、大学で学ぶ数学をスムーズに理解するには、高校までにある程度「統計」および「微分方程式」の指導が必要であるというを結果を得た。

また、SSH事業に関連して、魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生に実施していただいている。生徒の科学離れ・数学離れを防ぎ学習意欲を喚起するために、これらの内容を授業に取り込むような教材についても研究開発する必要があると考えている。

2　研究の流れ

「統計」および「微分方程式」の指導に関連して、昨年度は次のように項目を作り、具体的教材例をいくつか開発し実践した。

S：集団に潜む特徴をつかむ
- S1－1　資料の整理
- S1－2　集団を特徴づける値
- S1－3　確率分布と推測の考え方
- S1－4　相関係数と回帰直線
- S2－1　推定・検定
- S2－2　主成分分析

D：関数の微小な変化から微分方程式まで
- D1－1　関数の微小な変化
- D2－1　基本的な微分方程式
- D2－2　微分方程式の応用

（注：統計 Statistics、微分方程式 Differential equation、S1とD1は全員に学ばせたい内容で、S2とD2は発展的な内容と考えている。詳細は本校論集第44集参照）

上記の内容は指導要領に含まれているとは限らず、また、これらの指導時間を新たに増やすことは困難である。従って、実際の指導においては、現行の指導内容に絡めてこれらを扱っていく必要がある。

本年度より3年間をかけて、上記の項目についての教材例を充実させるとともに、現行のカリキュラムを踏まえた指導計画を開発する。

また、SSH 事業に関連して行った「数学特別講座」の内容の教材化についても順次研究開発する。

Development of Teaching Materials, Method and Curriculum
— Focus on Differential equation & Statistics connecting to the Learning in Upper Education —

3　本年度の研究

３年計画の初年度である本年度、これまでに検討作成した「統計」と「微分方程式」の指導事項・指導例、及び「特別講座」に関わる教材例を、順に記載する。

3．1　中学校での「統計」の指導

「統計」についての学習が中学校の教科書からなくなったが、世の中にはグラフや表があふれており、小学校での学習（３年生で棒グラフ、４年生で折れ線グラフ、５年生で百分率と円グラフ・帯グラフ及び統計的な考察、６年生で平均値）だけでは不十分である。統計の目的の一つである「集団の特徴を捕まえる」ために、データ全体を分かりやすく表現するにはどうすればよいか、２つの集団を比較するにはどうすればよいかなどを考えさせ、様々なグラフの作り方や平均値・標準偏差・正規分布・回帰直線・標準化などを中学校で指導したい。なお、正規分布をきちんと指導することは不可能であるが、統計的な推測において正規分布及び標準化は大変重要であり、中学校の段階で可能な限りその考え方を取り上げたいと考えている。

また、表計算ソフトが社会に広まってきており、これを利用すると瞬時に様々な形のグラフが表示され、また平均値や標準偏差なども求まる。以前に中学校学習指導要領にあった統計の指導は、度数分布表やヒストグラムの作り方、平均値の計算方法などが中心であったが、現行の学習時間の中で指導する必要があることも考慮すると、グラフや代表値などを求めることには表計算ソフトを活用するべきであろう。ソフトで作ったグラフや値を使って、集団の特徴を捉えるための見方や考え方を指導する。

統計の主たる目的は集団の特徴を捕まえることであり、表計算ソフトの基本的な使い方を指導した後、中学１年ではデータ整理の基本事項を扱い、１次関数の学習を終える中学２年で散布図や近似直線（回帰直線）、平方根を学習した中学３年で標準偏差や標準化と、その特徴を捕まえるための道具を順次増やしていくことになる。

また、統計の学習が生徒達にとって身近で興味を持てる内容であるか否かは、扱うデータ次第であろう。そこで、長期の休みを利用して生徒自身にデータを集めさせ、それらを用いて指導する。

（1）中学１年：統計の基本事項の指導

表計算ソフト（Excelなど）の基本的な使い方を指導した後、夏休みの宿題にデータ収集、整理、考察を課す。集まったデータやグラフを元に、次の事項を取り上げる。

a) 度数分布表及びヒストグラム

様々なグラフを紹介しながら、度数分布表及びヒストグラムの作り方を定着させる。また、表計算ソフトを利用すると階級の幅の変更も比較的容易に出来る。階級の幅でグラフの印象が変わることもあるので、階級の作り方にも気を配らせる。

b) グラフの見方（平均値の意味・捉え方）

様々なヒストグラムを取り上げながら、データ全体を代表する値として平均値がよく用いられるが、どんな場合でも代表しているといえるかを考えさせる。

c) 分布の比較（相対度数、代表値、散布度）

データの種類が同じ場合の比較。相対度数の利用や、平均値（代表値）だけでは比較出来ない場合もあることを確認する。

＜教材例＞

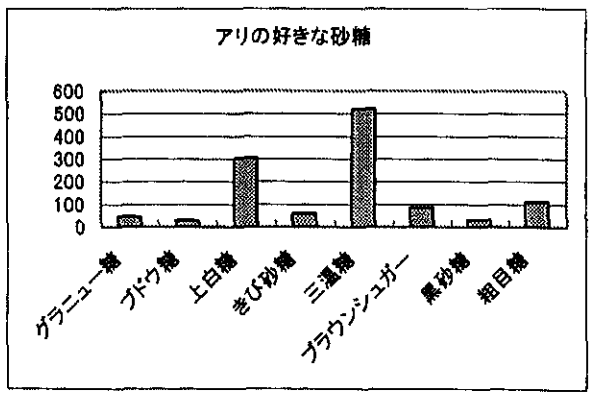
夏休み前に基本的なExcelの使い方を指導（後述）し、次のように課題を出した。

> 夏休みの宿題
>
> どんな分布か興味あることについてのデータを集め、代表値など（平均値　etc　）を算出し、度数分布表やグラフを作る。
>
> 注：１．データは原則として、１００個以上集めること。
>
> ２．レポートの１枚目には、クラス、番号、氏名を記入するとともに、いつ、どこで、どのようにして集めたデータかを明記し、そのデータについての感想を書くこと。
>
> ３．グラフなどだけでなく、生のデータの一覧もレポートに含めて提出すること。
>
> ４．Excel　などのソフトを利用してもよい。

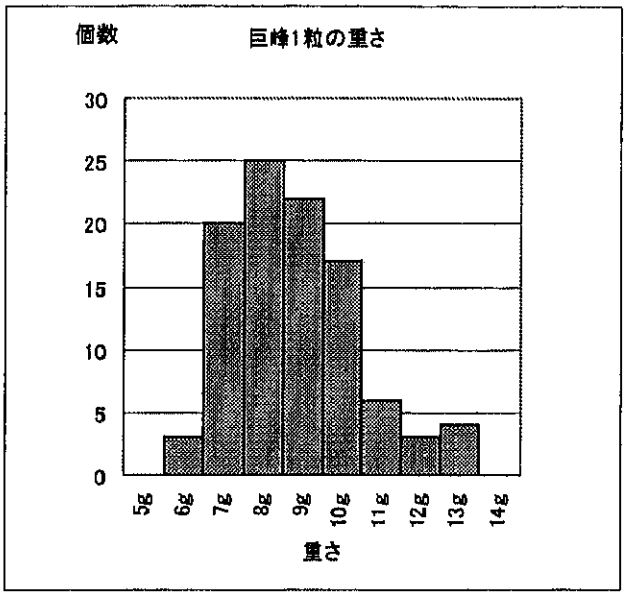
集まったレポート（ほとんどの者がExcelで作成）から、前述のa～cを考えてデータをピックアップし、次のように指導した。

まず次の①～⑤のような、様々なグラフを紹介する。

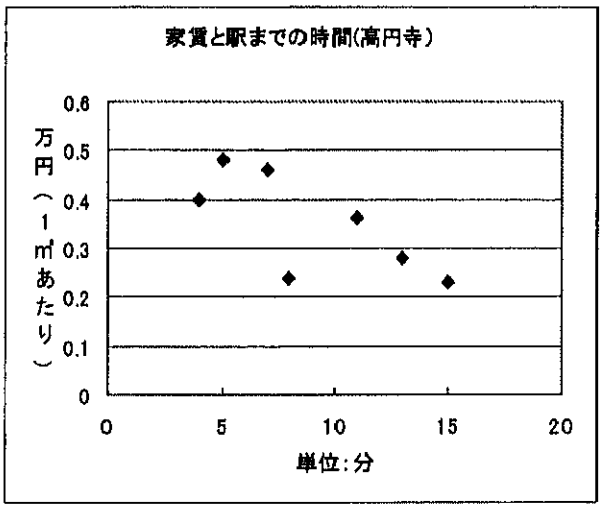
①アリの好む砂糖

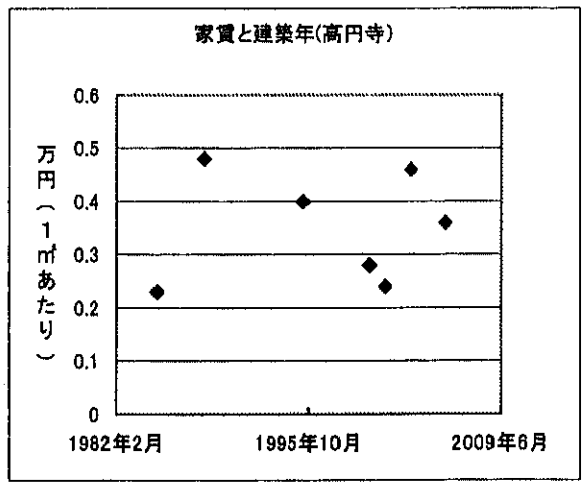


②巨峰１粒の重さ

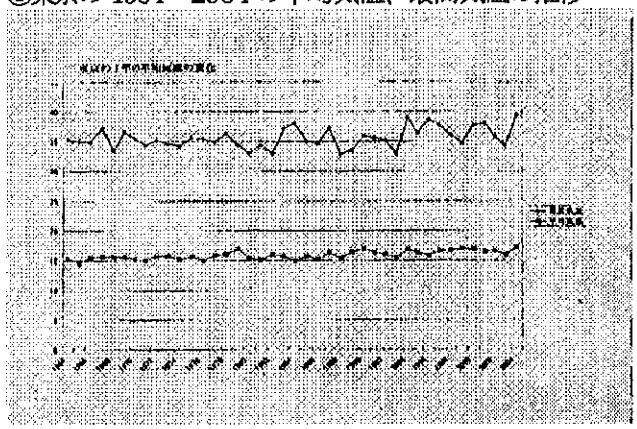


③アパートの家賃と駅からの距離、家賃と築年数の関係

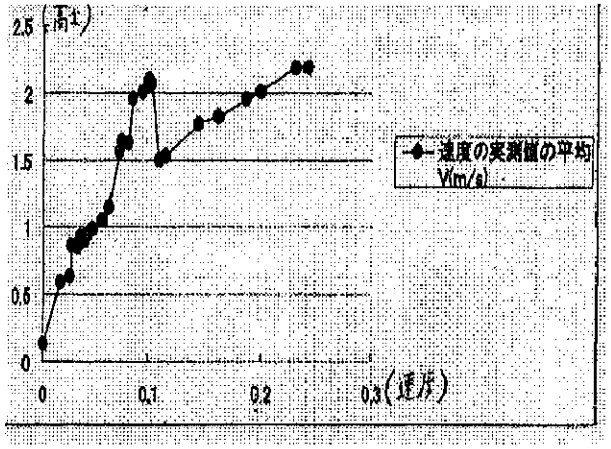




④東京の 1964～2004 の平均気温、最高気温の推移

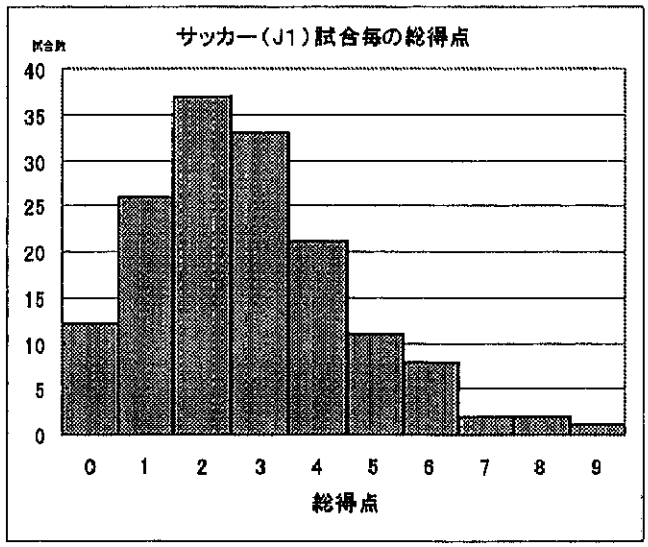


⑤振り子の、落とし初めた高さと最下点の速度の関係

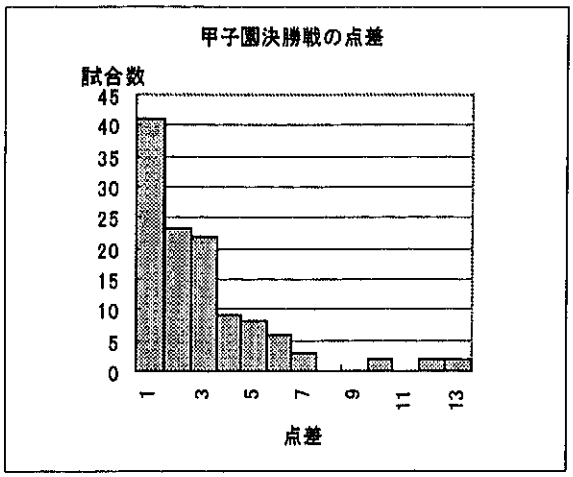


次の⑥～⑩で、分布の形と平均値の関係を検討する。

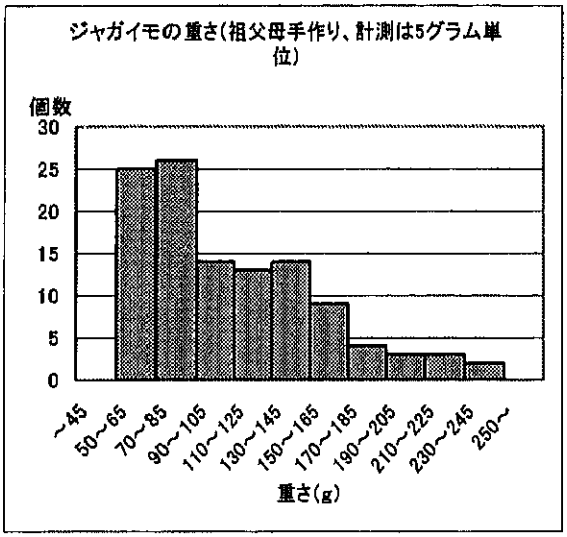
⑥サッカーＪリーグ１試合の総得点
（153 試合平均 2.78 点）



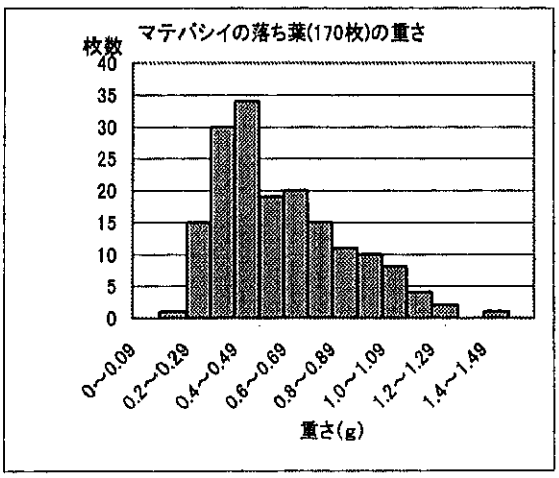
⑦高校野球甲子園決勝戦の得点差(118試合平均3.02点)



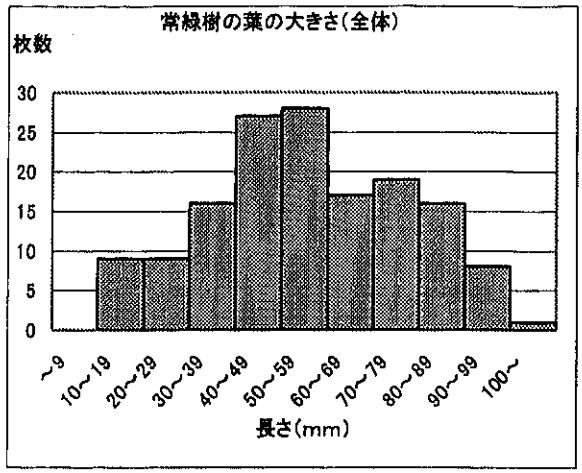
⑧ジャガイモ1個の重さ（田舎の祖父母手作り、計測5g単位、113個平均107g）



⑨マテバシイの落ち葉1枚の重さ（170枚平均0.585g）



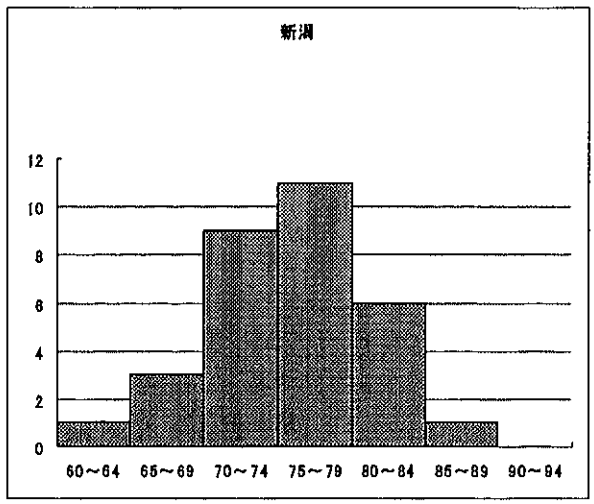
⑩ある常緑樹の葉の長さ(150枚、平均55.9mm)



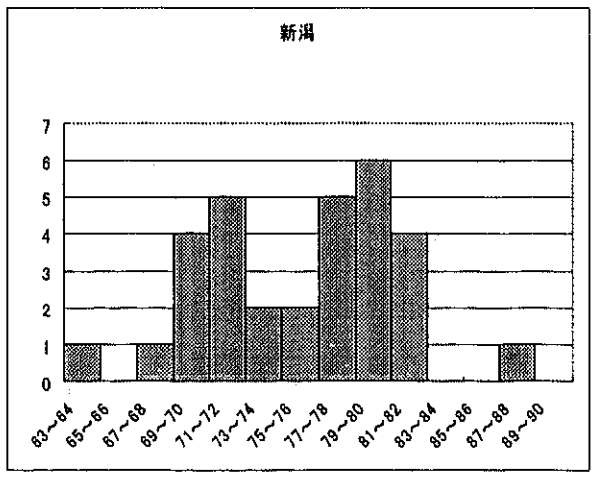
⑪では、階級の幅を取り上げるとともに、比較する。(平均値が同じでもグラフが違う)

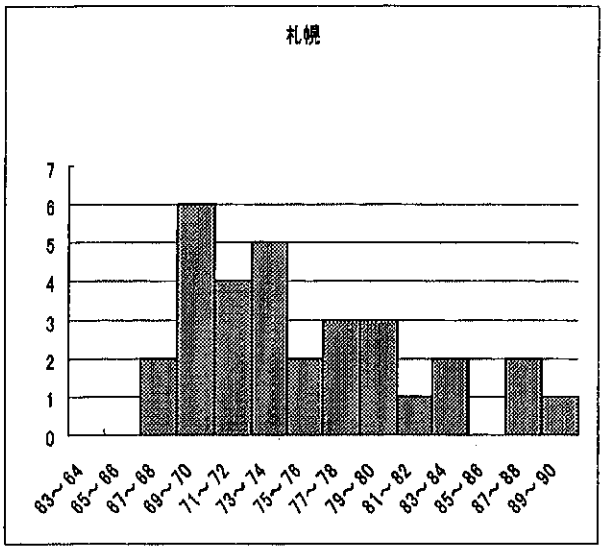
⑪新潟、札幌、那覇の2005年7月の、1日の平均湿度
(平均値は新潟75.61%、札幌74.94%、沖縄74.15%)

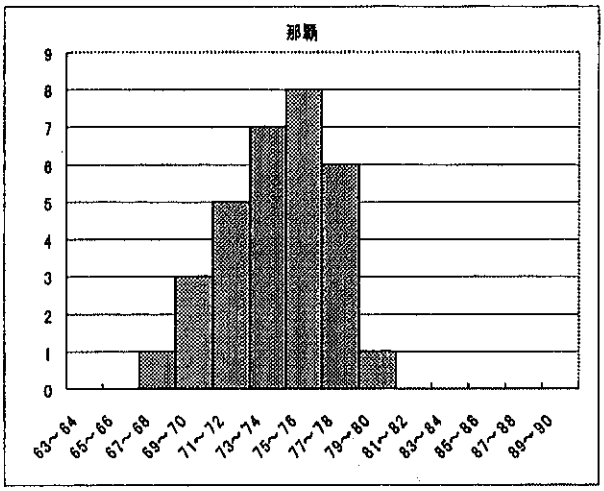
新潟：5%刻み



新潟：2%刻み



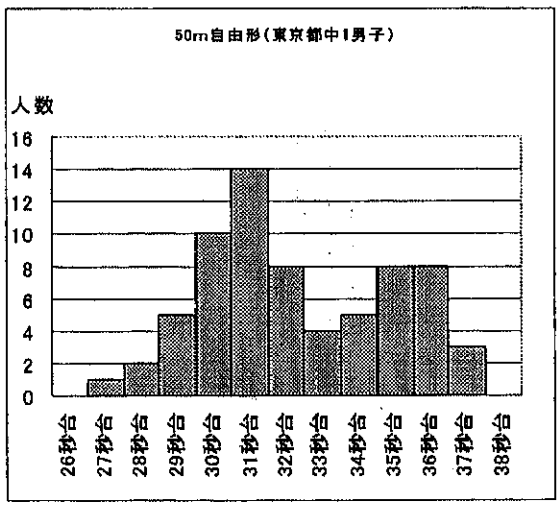


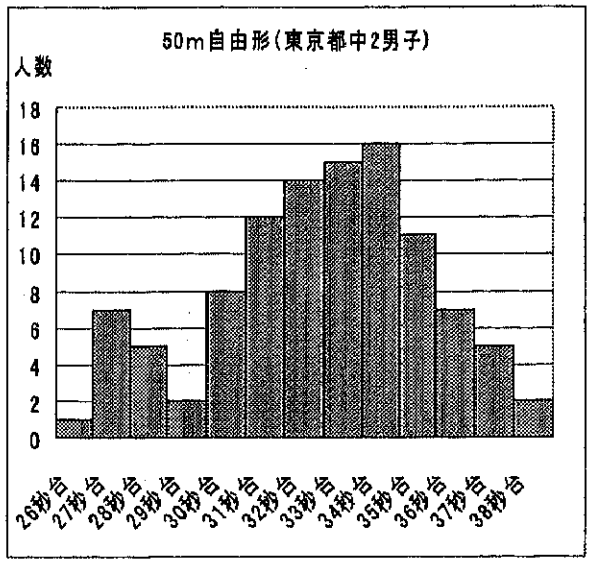


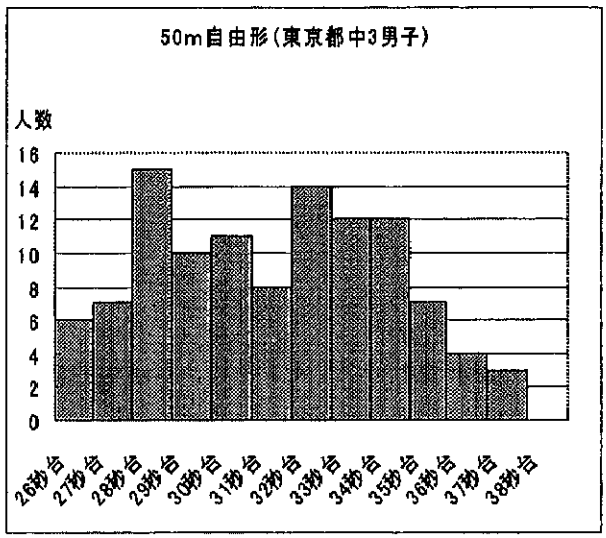
⑫⑬では、相対度数などを利用して分布を比較させる。

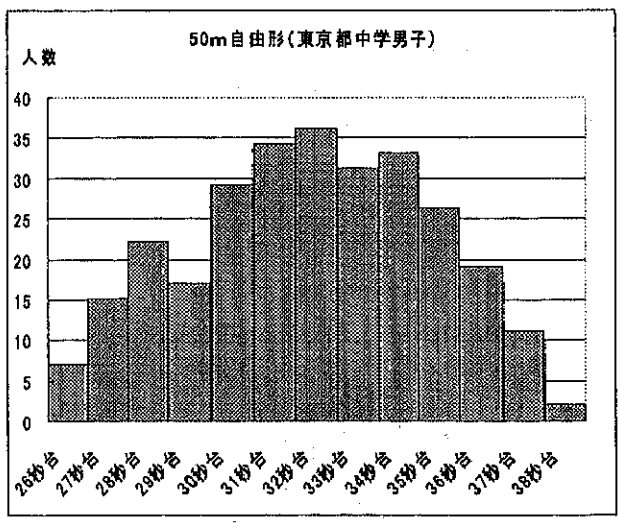
⑫競泳中学生男子５０m自由形(都大会)の記録

平均は中１(68人)32.84秒、中２（105人）32.98秒

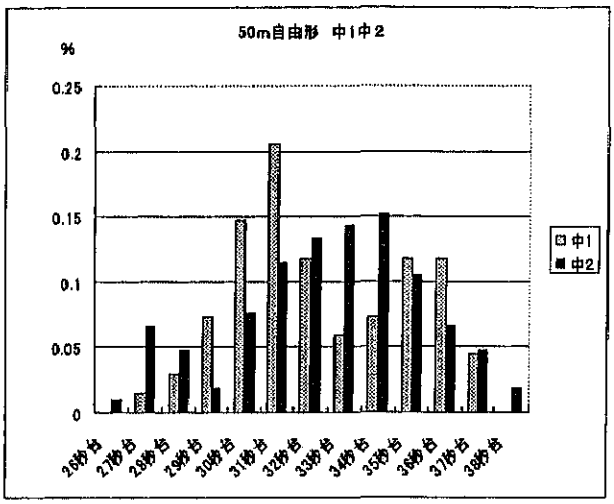


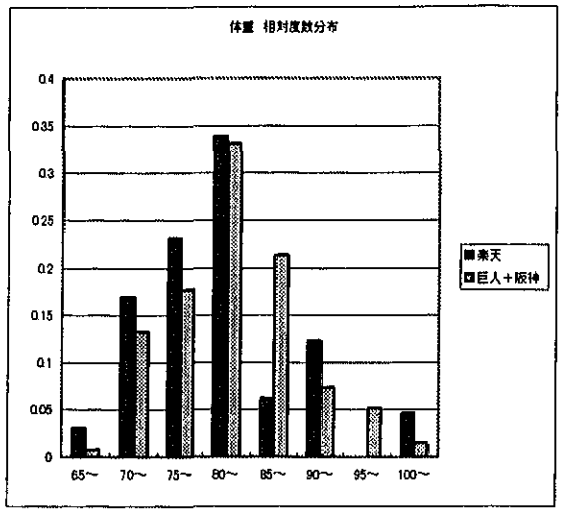






中１，中２の比較





⑬スポーツ選手の身長・体重

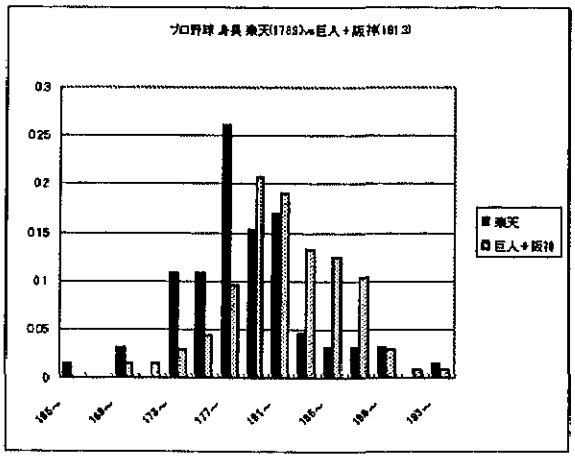
2005年の各チームのデータから算出した値

	巨人	巨人	阪神	阪神	楽天	楽天
人数	67	67	69	69	65	65
平均	181.6	82.3	180.9	82.3	178.9	80.8
	サンチエゴ	サンチエゴ		大相撲	大相撲	
人数	41	41		42	42	
平均	184.1	90.6		184.4	148.7	
	東芝府中	東芝府中	サントリー	サントリー	神戸製鋼	神戸製鋼
人数	44	44	41	41	48	48
平均	181.0	93.7	180.9	92.7	178.6	91.9

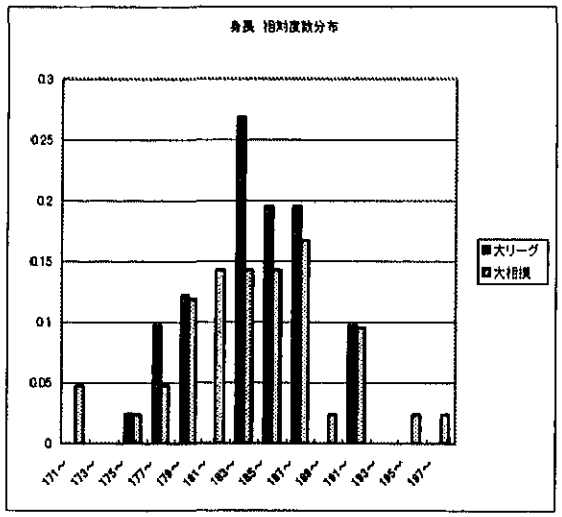
種目毎

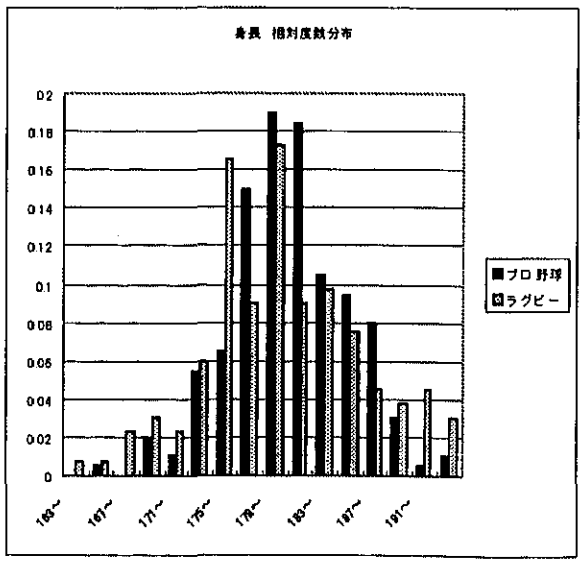
身長	プロ野球	大リーグ	ラグビー	大相撲
平均	180.5	184.1	180.1	184.4
体重	プロ野球	大リーグ	ラグビー	大相撲
平均	81.8	90.6	92.7	148.7

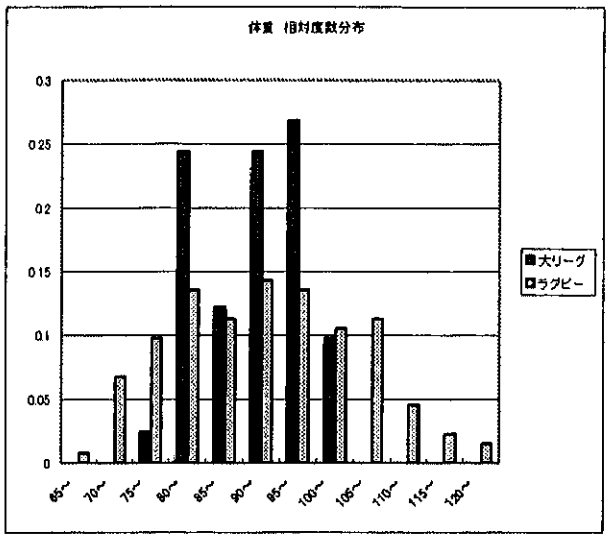
楽天と巨人・阪神の比較



種目毎で、平均値が近いものの比較







Excelの使い方で指導した内容

(以下、プリントにして配布した)

課題　下の説明を読み、次の①～⑤を行ってください。

① セルA1、B1、C1に、順に、クラス、番号、氏名を入力する。

② 次ページの数列（乱数表、省略）の適当なところから、2桁の数を30個取り出し、セルB3～B32に入力する。

③ 総和と平均値をB33、B34に表示させる。

④ 30個の数について、20刻み（0～19、～39、～59、～79、～99）の度数分布表をD3～D7、E3～E7に作成し、その柱状グラフ（ヒストグラム）をその横に表示させる。

⑤ 以上の結果を、プリントして提出。

(1) まず、Excelを立ち上げよう。

Excelは表計算用のソフトウエアー

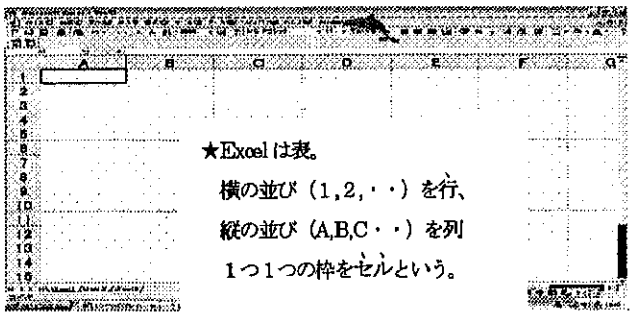
コンピュータスペースのコンピュータの場合、次のように行うと、図1のような画面が表示されます。

電源を入れ、Windowsにログイン

→画面上のプログラムをダブルクリック

→Excelをダブルクリック

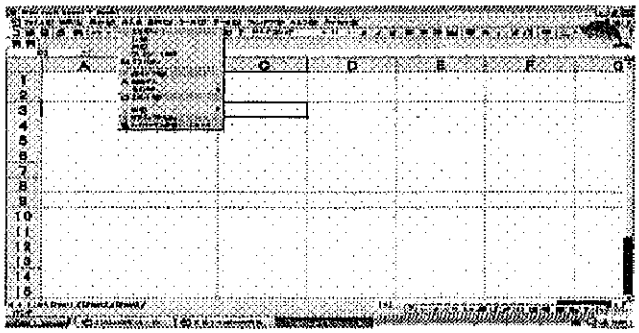
図1



(2) 用意されている様々な機能を見てみよう。

図1の画面にある、ファイル、編集、表示、挿入・・をクリックすると、図2の様になり、様々な機能が用意されている事が見えます。

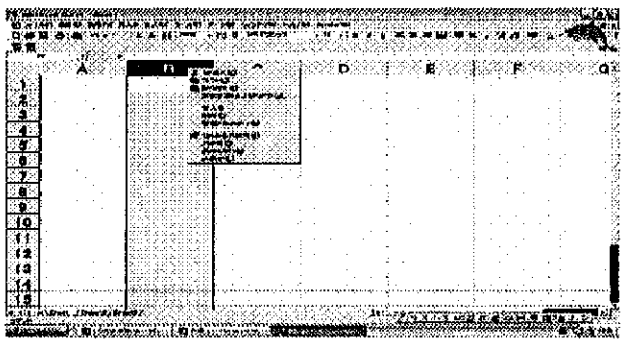
図2



また、セルやA,B,C・・・、1,2,3,・・・で、右クリックすると図3の様になります。

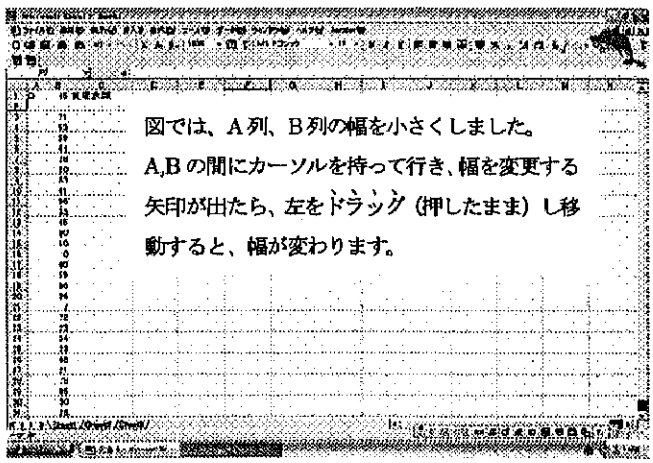
ここにある「削除」を選べば、セルや行全体、列全体が削除され、「挿入」を選べば、新しいセルや行全体、列全体が挿入されます。

図3



(3) セルへ文字や数値を入力しよう。

入力するセルをダブルクリックすると、入力できる状態になります。(日本語入力と半角英数字入力の切り替えは　Alt+半角/全角)



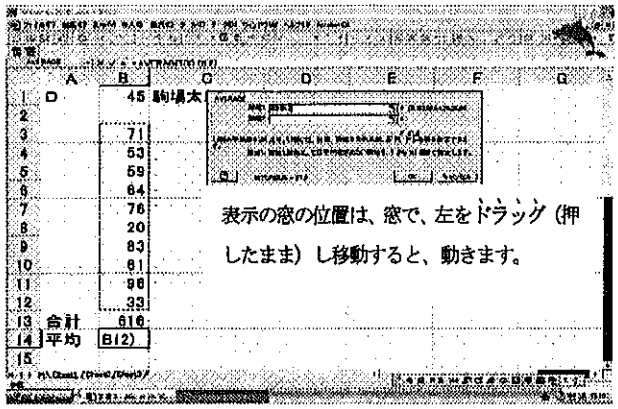
(4) 合計、平均値の挿入

値を入れたいセルを選択（クリック）した後、

合計は、[Σ] 又は [挿入]→[関数]→[SUM]

平均値は、[挿入]→[関数]→[AVERAGE]

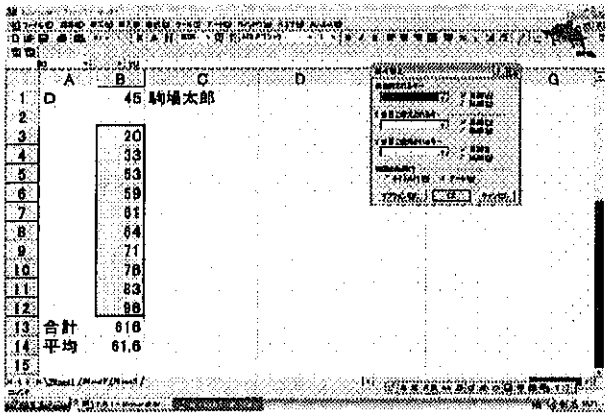
計算する範囲は、B3、B32 を入力 or 表の範囲をドラッグ して指定する。



(5) データの並べ替え

大小の順に並べ替えたい部分をドラッグして選択し、

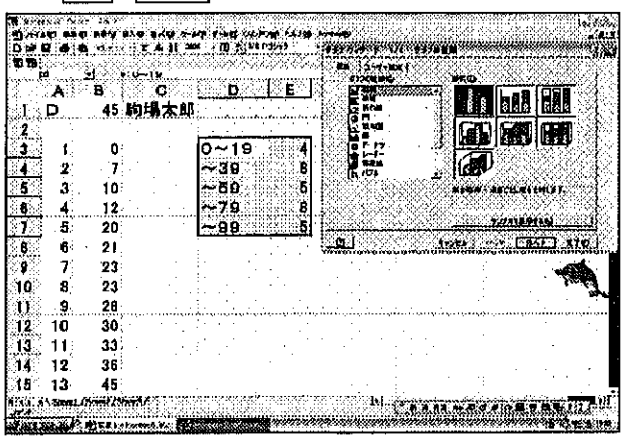
[データ]→[並べ替え]

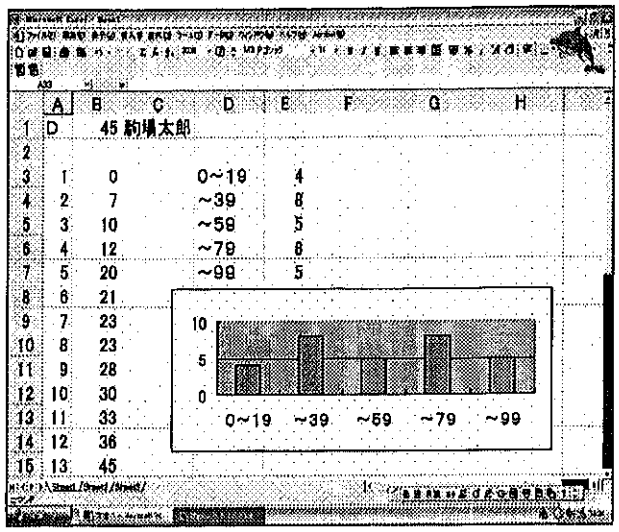


(6) ヒストグラム（柱状グラフ）の作成

度数分布表を作成し、その表全体を選択してから、

[挿入]→[グラフ]から、指示に従って作成します。





(7) 印刷、保存

印刷は、[ファイル]→[印刷]

保存は、[ファイル]→[名前を付けて保存]

（2） 中学２年：散布図・回帰直線、標準化の準備

１次関数の応用として、散布図及び回帰直線（Excel で書かせる程度）を扱う。

また、標準化の準備をかねて、グラフの移動（平行、対称）、相似拡大・縮小に加えて、軸を中心とした上下或いは左右への引き延ばしを考えさせる。

＜教材例＞

中１と同様な宿題を出し、提出されたレポートの散布図を用いて、回帰直線を取り上げる。具体的なデータ例については次年度報告する。

標準化の準備をかねて、１次関数の指導後に、次のような問題を取り扱う。

問１．直線 $y=2x$ のグラフを次のように移動・変形したグラフを書き、その式を答えよ。

①x 軸方向に－３、y 軸方向に５の平行移動

②x 軸及び y 軸についての対称移動

③原点についての対称移動

④原点を中心として３倍に拡大、$\frac{1}{3}$ 倍に縮小

⑤点 $(2,3)$ を中心として３倍及び $\frac{1}{3}$ 倍に拡大

⑥x 軸を基準とした（上下方向に）２倍の引き延ばし

⑦y 軸を基準とした（左右方向に）２倍の引き延ばし

問2. 線分$y=x+2(-2\leqq x\leqq 0)$、$y=-x+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$及びx軸で囲まれた部分について、次の移動で面積が1となるようにするには何倍すればよいか。またそのときの線分の式を答えよ。

① 原点を中心とした拡大（縮小）
② x軸を中心にした（上下方向の）引き延ばし
③ y軸を中心にした（左右方向の）引き延ばし

問4. $y=-x^2+1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 及びx軸で囲まれた部分について、次の移動で面積を1にするには何倍すればよいか。またそのときの曲線の式を求めよ。

① 原点を中心とした拡大（縮小）
② x軸を中心にした（上下方向の）引き延ばし
③ y軸を中心にした（左右方向の）引き延ばし

（3） 中学3年：標準偏差、相関係数、標準化の指導

平方根の指導後、分布の比較を通して標準偏差を扱い、左右対称な山型の分布として正規分布を知らせるとともに、そこでの標準偏差の意味を確認する。また、様々な分布を比較することで、標準化の必要性・有効性を感じさせるとともに、回帰直線、相関係数などを求めさせる。

＜教材例＞

平方根の指導後、分布の比較を通して標準偏差や正規分布に言及する事になるが、具体的なデータ例については次年度以降報告する。

また、2次関数の指導後、1次関数と同様に、$y=x^2$のグラフについて扱うとともに、次のように半円や放物線の囲む面積を1にするような拡大・縮小を考えさせる。

問1. 半円$x^2+y^2=1(0\leqq y\leqq 1)$及び$x$軸で囲まれた部分について、次の移動で面積を1にするには何倍すればよいか。またそのときの曲線の式を求めよ。

①原点を中心とした拡大（縮小）
②x軸を中心にした（上下方向の）引き延ばし
③y軸を中心にした（左右方向の）引き延ばし

問2. nは自然数とする。次の問い答えよ。

① $S_n=1+2+\cdots+n$ のとき、S_nを求めよ。

② $V_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$のとき、$\dfrac{V_n}{S_n}$を求めよ。

③ V_nを求めよ。

問3. $y=-x^2+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ 及びx軸、y軸で囲まれた部分Sについて、次の問いに答えよ。

① S をy軸に平行で等間隔に並ぶ直線でn分割したものを、y軸よりの方から、s_1、s_2、…、s_n とするとき、s_k $(k=1,2,\cdots,n)$を長方形とみなして、その面積をk,nの式で表せ。
②Sの面積の近似値をnの式で表せ。
③Sの面積を求めよ。

その後、標準化及びその利用について指導する。

具体的な指導内容は次年度以降報告するが、次のような問題を考えられるように指導するとともに、回帰直線、相関係数も扱いたい。

問.（偏差値について）

満点100点の試験を123名が受験したところ、平均80.6点、標準偏差8.9点であった。

この試験の分布が正規分布であったとして、平行移動及び平均を中心とした引き伸ばしによって、平均50点、標準偏差が10点となるようにしたとき、試験のx点は何点になるか。

また、変形した後が70点となるのは、試験の何点か？

3．2　高等学校での「統計」の指導

高校での「統計」についての学習は、数学Bでは、度数分布、代表値、標準偏差，相関関係（相関図と相関表，相関係数）などを扱い、数学Cでは、確率，確率分布（二項分布、正規分布）、統計的推測などを学べるようになっている。現実には、高校で扱う数学Bや数学Cの学習内容については、

数学B・・・数列、ベクトル、

数学C・・・行列、式と曲線

であることが多く、「統計」の内容はあまり扱われていないのが現状である。

日常の多くの場面では，「統計的な見方や処理」、「統計的な判断」が求められる。その意味では、将来の進路に関係なく、多くの生徒は「統計」の学習を必要している。

本校では，高校1年で相関図、相関係数、回帰直線、および推定・検定の考え方を扱いたいと考えている。

（1）高校1年：回帰直線、相関係数

2変量のデータ(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ をxy平面上にプロットして散布図をつくったとき、xとyに直線的な関係が見られるとき、その直線的な関係の強さを表す数値が相関係数r_{xy} $(-1 \le r_{xy} \le 1)$で次の式で表される。

$$r_{xy}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

散布図から相関係数の絶対値が大きければ大きいほど直線的な関係が強いことがわかるが，相関係数が 0.7 と 0.8 の違いが統計的にどのような意味があるのかは分からない。2変量のデータ(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ を標準化して考えることにより，相関係数の違いの統計的な意味が見えてくる。

標準化した2変量のデータを

$$(x_i, y_i)\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

とすると、標本平均は

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=0,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum y_i=0$$

xとyの標本分散は

$$V_x=\frac{1}{n}\sum x_i^2=1,\quad V_y=\frac{1}{n}\sum y_i^2=1$$

xとyの相関係数は

$$r_{xy}=\frac{1}{n}\sum x_i y_i$$

となる。

データ(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$に直線的な関係が見られるとき，その直線の式を$y=ax+b$とおく。

$\hat{y}_i=ax_i+b$ $(i=1,2,\cdots,n)$とすると、

$$\mathrm{L}=\frac{1}{n}\sum(y_i-\hat{y}_i)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum(y_i^2+a^2x_i^2+b^2+2ax_iy_i-2abx_i-2by_i)$$

$$=1+a^2+b^2-2ar_{xy}$$

$$=1+(a-r_{xy})^2+b^2-r_{xy}^2$$

Lを最小にするa，bは

$$a=r_{xy},\ b=0$$

となる。

したがって，回帰直線の式は

$$y=r_{xy}x\quad (x\text{の係数は，}x\text{と}y\text{の相関係数})$$

となる。

相関係数の意味を考えるために，y_i $(i=1,2,\cdots,n)$の標本分散を計算する。

$$1=V_y=\frac{1}{n}\sum y_i^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum(y_i-\hat{y}_i+\hat{y}_i)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum(y_i - r_{xy}x_i + r_{xy}x_i)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum\{(y_i - r_{xy}x_i)^2 + 2(y_i - r_{xy}x_i)r_{xy}x_i + (r_{xy}x_i)^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum(y_i - r_{xy}x_i)^2 + {r_{xy}}^2$$

このことは，y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の標本分散の

${r_{xy}}^2 \times 100\,\%$ (寄与率)

を x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の標本分散で説明できることを意味している。

また，$\sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i - r_{xy}x_i)^2}$ (回帰式まわりの標準偏差)

は、回帰式の適合の程度を表す尺度として用いられる。すなわち，この値が小さいほど適合度が良いことを意味する。

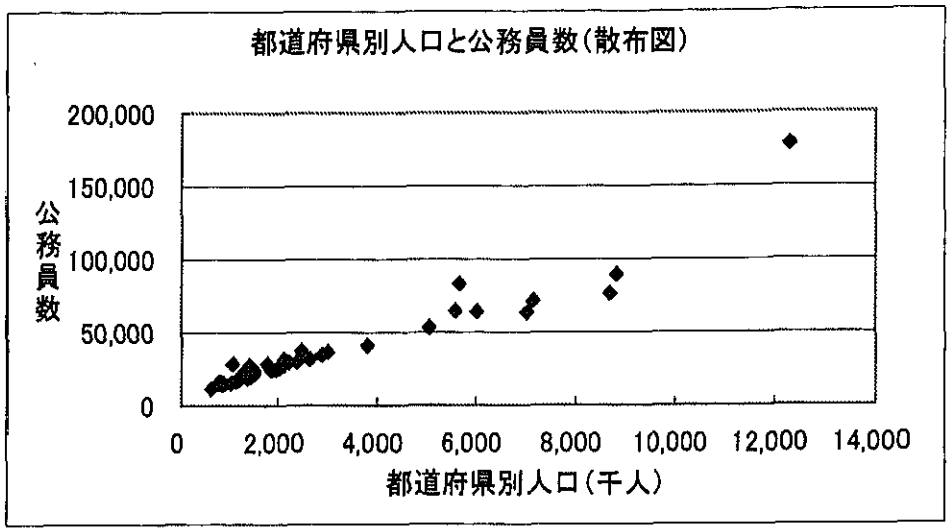
＜教材例＞

都道府県別人口と各都道府県公務員数との相関を判断する。

(参考統計資料：第54回総務省日本統計年鑑)

都道府県	公務員数(人)	人口(千人)	都道府県	公務員数(人)	人口(千人)
北海道	83,265	5,659	三重	25,442	1,862
青森	24,013	1,462	滋賀	19,225	1,366
岩手	27,505	1,402	京都	31,800	2,641
宮城	30,077	2,373	大阪	89,661	8,816
秋田	18,899	1,167	兵庫	64,674	5,585
山形	21,154	1,230	奈良	20,131	1,436
福島	31,658	2,113	和歌山	28,625	1,056
茨城	36,592	2,991	鳥取	11,615	611
栃木	25,985	2,011	島根	15,630	753
群馬	25,951	2,034	岡山	25,079	1,953
埼玉	63,576	7,029	広島	34,875	2,878
千葉	64,212	6,024	山口	22,291	1,512
東京	178,283	12,310	徳島	14,840	817
神奈川	76,492	8,687	香川	15,856	1,020
新潟	37,606	2,460	愛媛	23,462	1,483
富山	17,185	1,117	高知	16,598	807
石川	17,654	1,180	福岡	53,434	5,051
福井	14,702	827	佐賀	14,807	872
山梨	15,270	887	長崎	24,029	1,501
長野	29,585	2,215	熊本	24,643	1,855
岐阜	27,862	2,111	大分	19,576	1,218
静岡	41,142	3,793	宮崎	18,941	1,164
愛知	71,709	7,158	鹿児島	28,598	1,775
			沖縄	24,085	1,349

散布図を作成すると

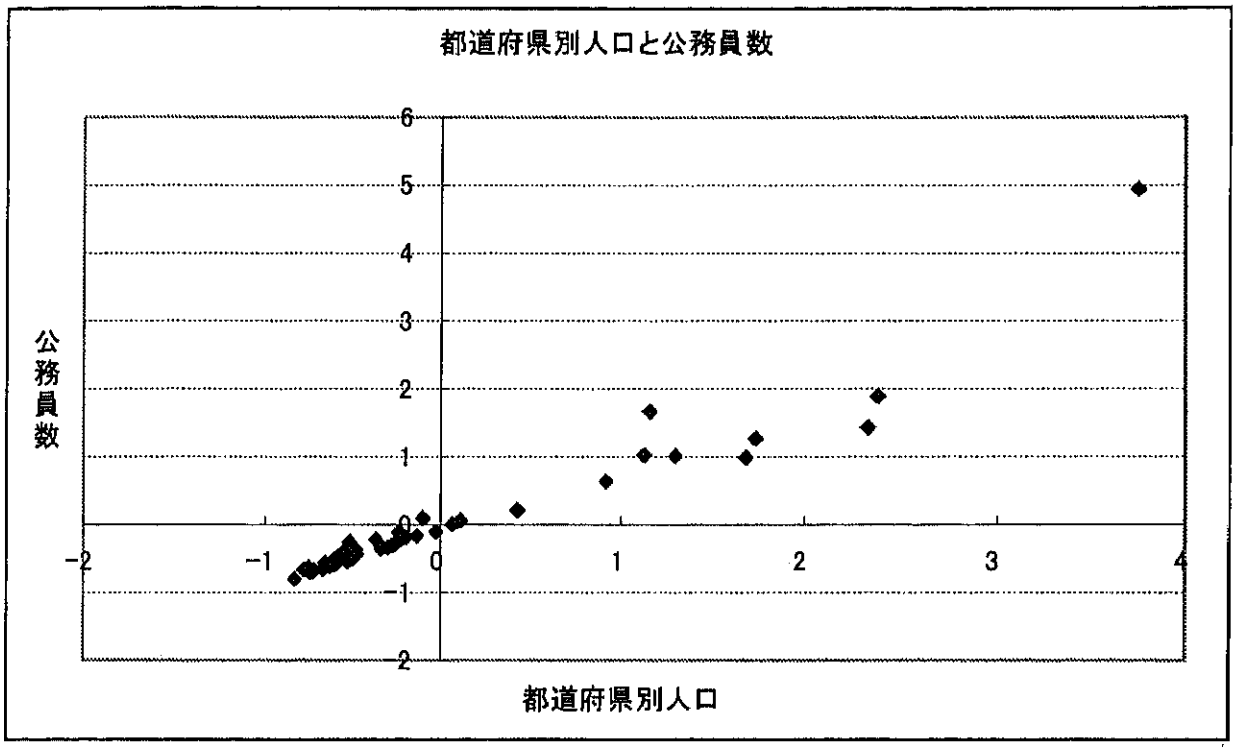


回帰直線の方程式は $y = 10.85x + 5398.84$ であり、相関係数は 0.957 である。

データを標準化すると

都道府県	公務員数(人)	人口(千人)	都道府県	公務員数(人)	人口(千人)
北海道	1.668	1.150	三重	-0.324	-0.333
青森	-0.374	-0.490	滋賀	-0.539	-0.527
岩手	-0.253	-0.513	京都	-0.105	-0.029
宮城	-0.165	-0.134	大阪	1.890	2.383
秋田	-0.550	-0.605	兵庫	1.028	1.121
山形	-0.472	-0.580	奈良	-0.508	-0.500
福島	-0.110	-0.235	和歌山	-0.559	-0.648
茨城	0.060	0.108	鳥取	-0.801	-0.822
栃木	-0.306	-0.275	島根	-0.663	-0.766
群馬	-0.307	-0.266	岡山	-0.337	-0.298
埼玉	0.990	1.685	広島	0.001	0.064
千葉	1.012	1.292	山口	-0.433	-0.470
東京	4.943	3.747	徳島	-0.690	-0.741
神奈川	1.435	2.332	香川	-0.655	-0.662
新潟	0.095	-0.100	愛媛	-0.393	-0.481
富山	-0.609	-0.624	高知	-0.629	-0.745
石川	-0.593	-0.600	福岡	0.640	0.912
福井	-0.695	-0.738	佐賀	-0.691	-0.720
山梨	-0.675	-0.714	長崎	-0.373	-0.474
長野	-0.182	-0.195	熊本	-0.352	-0.336
岐阜	-0.241	-0.236	大分	-0.527	-0.585
静岡	0.217	0.421	宮崎	-0.549	-0.606
愛知	1.270	1.735	鹿児島	-0.216	-0.367
			沖縄	-0.371	-0.534

標準化したデータの散布図



標準化したデータでの回帰直線は

$$y = 0.957x$$

寄与率は $0.957^2 \times 100 = 91.6$ (%)

公務員数は,都道府県の人口により、約92%説明できる。
回帰式への適合度は0.917である。
すべてのデータが2つの直線

$$y = 0.957x + 2 \times 0.917$$

$$y = 0.957x - 2 \times 0.917$$

の間にある。

考察:寄与率は約 92%となり、これらの2数値の相関が非常に高いことが明らかになった。また、回帰直線から大きくずれを示した都道府県は人口500万人以上の大都市に多い。

(2) 高校1年:推定・検定

数学Cでは、正規分布を用いて母平均の推定や母比率の推定を扱っているが、高校1年で推定・検定を扱う場合に使える確率分布は、場合の数を用いて計算できる確率分布である。

ここでは, 連の数の確率, 二項分布, 超幾何分布を用いて推定・検定を扱ってみた。

(2−1) 連の数による検定

連の数について・・・赤球9個、白球6個を一列に並べることを考える。ある並び方で、同じ色の球が続いているとき、その続きを連という。

例えば、次のように球が並んでいる場合

赤赤白白白赤白白赤赤赤赤白赤赤

赤球の連は4つ、白球の連は3つあり、この並べ方の連の数は7つになる。

m 個の赤球と n 個の白球を1列に並べるとき、異なる並び方の総数は

$$_{m+n}C_n = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

である。

$0 < m \leq n$ のとき、m 個の赤球と n 個の白球からなる連の数をXとすると、

$X = 2k$ である確率は

$$P(X=2k) = \frac{{}_{m-1}C_{k-1} \times {}_{n-1}C_{k-1}}{{}_{m+n}C_n}$$

$X = 2k-1$ である確率は

$$P(X=2k) = \frac{{}_{m-1}C_{k-1} \times {}_{n-1}C_{k-2} + {}_{m-1}C_{k-2} \times {}_{n-1}C_{k-1}}{{}_{m+n}C_n}$$

となる。

＜教材例1＞

30本の植物を1列に並べて植えたところ、

枯れたもの(A)と枯れないもの(B)の配列は次のようになった。

BBBAABBBBBBBBBBAAABBBBBBBBBBBA

この配列では、連の数はX=6である。

連の数が6以下になる確率 $P(X \leq 6)$ を求めると、

$$P(X=6) = \frac{{}_5C_2 \times {}_{23}C_2}{{}_{30}C_{24}} = 0.0085$$

$$P(X=5) = \frac{{}_5C_2 \times {}_{23}C_1 + {}_5C_1 \times {}_{23}C_2}{{}_{30}C_{24}} = 0.0025$$

$$P(X=4) = \frac{{}_5C_1 \times {}_{23}C_1}{{}_{30}C_{24}} = 0.0004$$

$$P(X=3) = \frac{{}_5C_1 + {}_{23}C_1}{{}_{30}C_{24}} = 0.0001$$

$$P(X=2) = 0$$

より、$P(X \leq 6) = 0.0115$

この結果からAとBの配列がランダムにであるとすると、連の個数が6となる確率は非常に小さい。

したがって，隣り合う植物が枯れることには何か原因があることを意味していると考えることができる。

＜教材例2＞

郵政民営化法案の賛否が話題になる中、新聞に「有権者10人に聞きました」という次のような表がありました。この表を流し読みしたとき，民営化に反対の方が賛成の方より多いとの印象を受けた。

しかし、表を眺めると賛成と反対が同数であることがわかる。

	賛否	理 由
大学生 女性 23歳	×	妥協の産物。国民によく分からないまま議論が進んでいる
地方公務員 男性 54歳	×	民営化すると、へき地で特定郵便局の経営が成り立たなくなると思う
飲食店経営 男性 57歳	×	貴重な金融機関。民営化で赤字郵便局がつぶれると利便性が悪くなるのでは
主婦 女性 68歳	○	金融機関が現行の銀行と郵便h貯金の2本立てでは、効率が悪いのでは
飲食店経営 男性 45歳	○	民間で出来ることは民間でやるべきで、公務員らのスリム化をはかるべきだ
会社員 女性 45歳	×	民営化で、郵便貯金も国の保証がなくなるのはないかと心配
飲食店経営 男性 58歳	×	民営化されたら、将来的には全国均一のサービスが保たれなくなり質が落ちる
会社員 女性 31歳	○	無駄なお金を使っていると思うので、民営化してスマートにできるのでは
鉄道会社員 男性 36歳	○	競争原理の働かない公の機関よりサービス業として客の目にさらされた方がいい
会社経営 男性 65歳	○	国は小さな政府であって欲しい。金融業を国が行うのは不健康

最初の印象として、反対が多いと感じた理由としては先頭から連続して3つ反対であることが強いインパクトを与えたと考えられる。

ランダムに賛成と反対を並べたとき、連の数Xが 4 以下で，反対から並ぶ確率を計算してみると、

$$P(X \leq 4) = \frac{1}{6}$$

より，求める確率は0.083である。

賛成と反対がこのように並ぶ確率は小さいものであるから、この並べ方はある意図をもって並べたとも考えられる。

(2－2) 二項分布による検定

確率変数Xが二項分布$B(n,p)$に従うとき、

$X=k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$である確率は

$$P(X-k)={}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$$

で表せる。

＜教材例＞

A, B2種類のタイヤの磨耗具合に差があるかを調べるために、自動車の左右どちらにするかをランダムに割り振って、A, Bのタイヤを18台の自動車に取り付けて走らせ磨耗率を測定した。

タイヤの磨耗量(単位 mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3.7	5.2	5.8	3.0	5.0	2.7	3.4	4.2	4.0
B	4.0	6.6	5.6	4.2	6.5	2.8	2.2	3.8	4.1
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	2.9	3.5	4.5	3.3	3.5	4.6	2.8	5.1	3.4
B	3.2	2.9	5.1	3.7	3.7	4.3	3.1	5.3	3.9

得られた数値データを用いて、AとBに磨耗量に差があるかを調べるには、平均の差の検定にはt分布の知識が必要になり,高校1年では扱いにくい。

そこで18台に自動車のそれぞれで、どちらのタイヤの磨耗量が多いかだけを考え調べてみる。

磨耗量の大小(磨耗量が大きい方に+の印)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			+				+	+	
B	+	+		+	+	+			+
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A		+				+			
B	+		+	+	+		+	+	+

18台の自動車で、Aの磨耗率が大きいのは5台,Bの磨耗率大きいのは13台である。

「AとBのタイヤの磨耗には差がない」と仮定して、このようなことが起こる確率を計算する。

Aのタイヤが Bのタイヤより磨耗率が大きい自動車の台数をXとすると、Xが二項分布$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$に従うことになる。

$$P(X=k)={}_{18}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^2\quad(k=0,1,2,\cdots,18)$$

したがって,$X\le 5$である確率を計算すると

$$P(X\le 5)$$

$$=({}_{18}C_0+{}_{18}C_1+{}_{18}C_2+{}_{18}C_3+{}_{18}C_4+{}_{18}C_5)\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$$

$$=0.048$$

Aのタイヤと Bタイヤの磨耗率に差がないとすると、

18台中Bのタイヤの磨耗率がAのタイヤの磨耗率を上回る自動車が5台以下になる確率は非常に小さいことになる。

このことは、Aのタイヤより Bのタイヤの方が磨耗率が大きいと考えた方が妥当であることを意味する。

(2－3) 超幾何分布による推定

確率変数Xが超幾何分布に従うとき、

$X=k\ (k=\max(0,r+n-N),\cdots,\min(n,r))$

である確率は

$$P(X=k)=\frac{{}_rC_k\times{}_{N-r}C_{n-k}}{{}_NC_n}$$

で表せる。

$q_k(N)=\frac{{}_rC_k\times{}_{N-r}C_{n-k}}{{}_NC_n}$ とおく。

$\frac{q_k(N)}{q_k(N-1)}=\frac{(N-r)(N-n)}{N(N-r-n+k)}$ となる。

$\frac{q_k(N)}{q_k(N-1)}<1$ のとき、$nr<Nk$

$\frac{q_k(N)}{q_k(N-1)}>1$ のとき、$nr>Nk$

であるから、$q_k(N)$ は$N=\left[\frac{rn}{k}\right]$で最大となる。

＜教材例1＞

容器の中に入っている球の個数Nを推測したい。

この容器から250個の球を取り出し,印をつけてから容器に戻す。容器の中をよくかき混ぜてから、再び100個の球を取り出して印のついた球の個数を調べる。

印のついた球の個数が25個であったすると,起こりうる確率を最大にするNは

$$N=\left[\frac{250\times100}{25}\right]=10000$$

であるから、容器の中の球の個数は 10000 個であることが妥当である。

＜教材例 2＞

単位をもらえる生徒ならば 50 問のうち少なくとも 40 問は解けるはずである問題の中から 6 問を出題する。正答数が少ない場合に、単位不認定とする。

判定が誤る確率を 0.05 以下にするには、正答数が何問以下のときに単位不認定にすればよいか。

本来、単位がもらえる生徒の6問中の正答数を X とすると、X は超幾何分布に従う。

$$P(X=k)=\frac{{}_{10}C_k\times{}_{10}C_{6-k}}{{}_{50}C_6}\quad(k=0,1,2,\cdots,6)$$

$$P(X=6)=0\ ,P(X=5)=0.001$$

$$P(X=4)=0.010\ ,P(X=3)=0.075$$

より、$P(X\geq4)\leq0.05$

したがって,正答数が3問以下のときに単位不認定をすればよいことになる。

(2－3) 最大値の分布による推定

容器の中に 1 から N までの番号のついたカードが入っている。ランダムな復元抽出によって、この容器の中からn枚のカードを取り出したとき、カードに書かれた数の最大数 X から N の数を推定する。

$$P(X\leq k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n\quad(k=1,2,\cdots,N)$$

であるから、

$$P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)$$

$$=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

X の期待値を計算すると、

$$EX=\sum kP(X=k)$$

$$=\frac{1}{N^n}\sum\{k^n-(k-1)^{n+1}-(k-1)^n\}$$

$$=\frac{1}{N^n}\{N^{n+1}-\sum(k-1)^n\}$$

大きな N に対して

$$\frac{1}{N^n}\sum(k-1)^n\approx\frac{1}{N^n}\int_0^N x^n dx=\frac{N}{n+1}$$

よって,大きな N に対しては

$$EX\approx\frac{n}{n+1}N$$

(例)容器の中から5枚のカードを復元抽出したところ、最大に番号は 2000 であった。このことから

$$\frac{5}{5+1}N=2000$$

より、$N=2400$

この容器には 2400 枚のカード入っていると推定できる。

分布の近似計算に定積分を用いているので、高校 1 年では扱いにくいと思うが、箱の中にカードを入れて確率実験を行うとかなり良い値がでるので取り上げてみた。

3．3　中学校での「微分方程式」の指導

中学校での関数の変化についての学習は、1年での関数と比例の比例定数、2年での1次関数の変化の割合、3年での関数$y = ax^2$の『変化の割合』である。これを、「微分方程式」への考えに繋げていくためには、昨年度までの研究の中に挙げている関数の微小な変化に注目させることから始めていくことがよい。高校の微分法では、関数$y = f(x)$について、xの微小な変化量Δxに対するyの変化量をΔyとして、その比の極限$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$に注目する。

微小な変化に注目し、関数の性質を知ろうとする考え方は近代的であり、応用範囲が広い。実際、自然科学はもちろん社会科学の分野でも、この考えに基づいて微分方程式を導き、関数にせまっている。

そこで、関数の微小な変化に注目する事から始めていくための教材例を示す。

(1)中学1年：一定の変化をみる比例定数

2つの変数の間に成り立つ関係を見つけ出すためにそれぞれの変化の関連を、ある一定区間という大きな範囲でとらえながらもできる限り狭い範囲で見つけ出そうとすることが、この段階で理解してもらうことが大切である。

(2)中学2年：微小な変化が一定な1次関数

グラブの座標より変化を読みとるが、変数xの区間を大きくしても一定であることは学習するが、逆に、区間を狭くすることはあまり取り上げていない。そこで、区間を微小にした場合はどのようになるかときいてみることもいいだろう。

(3)中学3年：関数の微小な変化からの極値問題

関数の微小な変化に注目すると、その関数の性質が簡単に見えてくることがある。この考えは微分方程式に繋がるものであり、関数を扱う様々な場面で、常に意識して指導したい。

そして、関数を取り扱うとき、増加・減少などの変化のようすは重大な関心事であり、当然、最大・最小は最も注目する事柄である。増減の切り替わり、即ち極大極小がどのようなときに起きるかが、微小な変化に注目すると見えてくる。

関数$S(k)$について、kの微小な増加量Δkに対する$S(k)$の変化量をΔSとすると、

$\Delta S > 0$のとき$S(k)$は増加し、

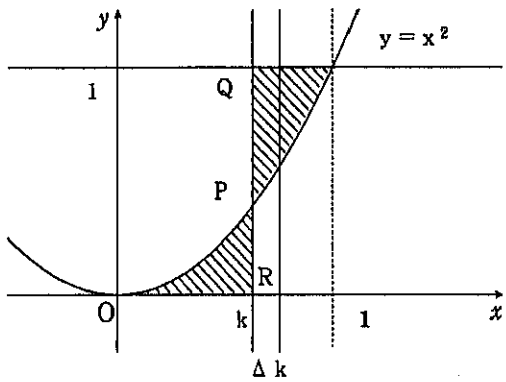
$\Delta S < 0$のとき$S(k)$は減少する。

したがって、$S(k)$が極大・極小となるとき、$S(k)$が連続であるならば、$\Delta S = 0$である。このことやΔSを近似的に求めることについては直感的に納得させ、最大・最小となる場合を、$\Delta S = 0$から考える。

$S(k)$として様々な関数を取り上げることができるが、面積を表す場合の例を以下に示す。

<教材例1>

$y = x^2$及び直線$y = 0$, $y = 1$, $x = k$　(kは定数で、$0 \leqq k \leqq 1$）で囲まれる2つの部分の面積の和をS(k)とする。S(k)を最小にするkの値は？



kの微小な変化を考えて、$\Delta S = 0$となるのは、PQ=PRのときである。

解)　kの微小な増加量Δkに対する$S(k)$の変化量をΔSとする。

$S(k)$の変化に注目して、ΔSの増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときが最小。

Δkが微小であることから、それぞれの部分を長方形と考えて、

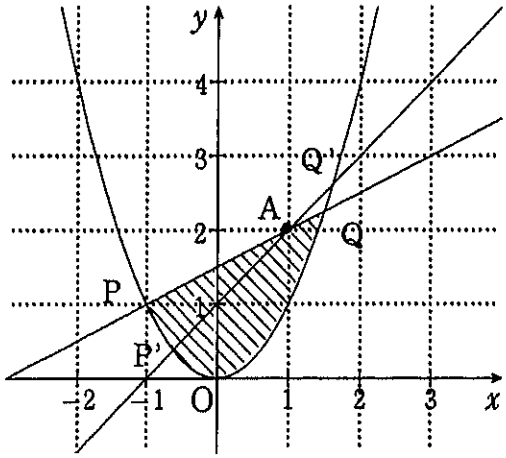
$$k^2 \cdot \Delta k = (1 - k^2)\Delta k$$

$$k^2 = 1 - k^2 \quad (\rightarrow \text{即ち、PQ=PR})$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

＜教材例２＞

$y=x^2$ と点A(1，2)を通る直線mで囲まれる部分の面積が、最小となるような直線mは？



直線mの微小な変化を考え、$\Delta S=0$ となるのは、ＡＰ＝ＡＱのときである。

解)　直線mの微小に変化させるので、mと x 軸とのつくる角を θ として、面積を $S(\theta)$、θ の微小な増加量 $\Delta\theta$ に対する $S(\theta)$ の変化量を ΔS とする。

$S(\theta)$ の変化に注目して、ΔS の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときに最小となる場合がある。

$\Delta\theta$ が微小であることから、それぞれの部分を扇形と考えて、ＡＰ＝ＡＰ´＝a，
ＡＱ＝ＡＱ´＝b　とすると、

$$\pi a^2\frac{\Delta\theta}{360^\circ}=\pi b^2\frac{\Delta\theta}{360^\circ}$$

$$a^2=b^2$$

よって　$a=b$　（ → 即ち、ＡＰ＝ＡＱ）

このことから、$P(\alpha,\alpha^2)$，$Q(\beta,\beta^2)$ とすると、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1\ ,\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=2$$

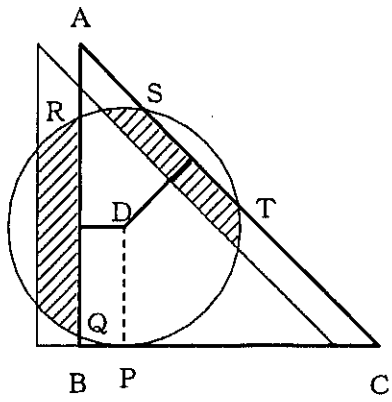
これを解いて、P(0，0)，Q(2，4)

したがって、最小のときの直線mは、$y=2x$

＜教材例３＞

ＡＢ＝ＢＣ＝3，∠ＡＢＣ＝９０° の△ＡＢＣと、半径１の円Ｄがあり、辺ＢＣ上の点Ｐで、円Ｄが辺ＢＣに接している。

△ＡＢＣと円Ｄの共通部分の面積が最大となるようなＰの位置は？



解)　ＰＢ＝k、共通部分の面積を $S(k)$ として、k の微小な増加量 Δk に対する $S(k)$ の変化量を ΔS とする。$S(k)$ の変化に注目して、ΔS の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときに最大となる場合がある。

円Ｄと△ＡＢＣの交点を、Q,P,S,Tとすると、

$$QR=2\sqrt{1-k^2}\quad ,\ ST=2\sqrt{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

であり、Δk が微小であることから、それぞれの部分を長方形と考えて、

$$2\sqrt{1-k^2}\cdot\Delta k=2\sqrt{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{\Delta k}{\sqrt{2}}$$

$$1-k^2=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

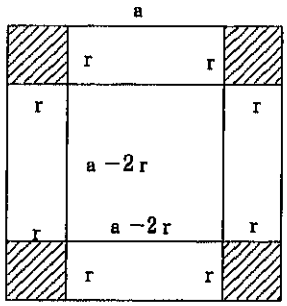
整理して、$3k^2+4k-6=0$

したがって、$k(=BP)=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{3}$ のとき面積最大となる。

次に関数が体積を表す場合の例を示す。
どちらも、高校の微分法の例題として取り上げられることが多く、また、実際に立体を作成して、生徒のイメージを具体的に持たせることができ易いと思う。

＜教材例４＞

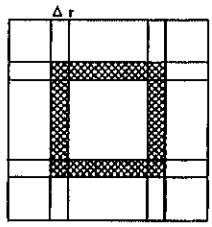
一辺の長さがａの正方形の四隅から、同じ大きさの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない箱をつくる。この箱の容積の最大値は？



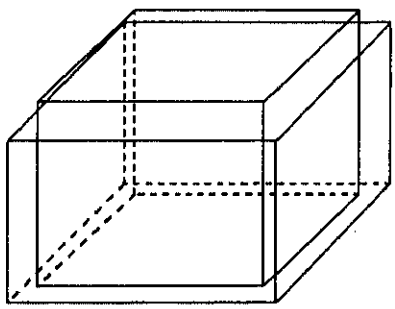
解）　切り取る正方形の一辺の長さをr　$\left(0<r<\dfrac{a}{2}\right)$、箱の容積を$V(r)$、$r$の微小な増加量を$\Delta r$とし、それに対する$V(r)$の変化量を$\Delta V$とする。

$V(r)$の変化に注目して、ΔVの増加する部分と減少する部分の容積が等しくなるときに最大となる場合がある。

Δrの変化に対して、箱の高さがrから$r+\Delta r$へΔr増加し、底面は$a-2(r+\Delta r)$が一辺の正方形となる。



よって、側面が一回り小さくなり、高さが上へ高くなるので、それぞれの部分を外枠と直方体と考えて、

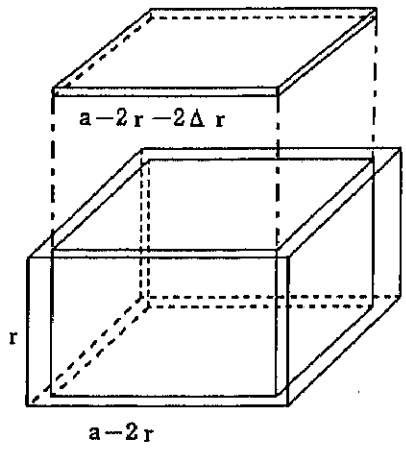


外枠の体積；

$$\{(a-2r)\times\Delta r\times 2+(a-2r-2\Delta r)\times\Delta r\times 2\}\times r$$

直方体の体積；$(a-2r-2\Delta r)^2\times\Delta r$

よって



$$\{(a-2r)\times\Delta r\times 2+(a-2r-2\Delta r)\times\Delta r\times 2\}\times r$$
$$=(a-2r-2\Delta r)^2\times\Delta r$$
$$\{(a-2r)+(a-2r-2\Delta r)\}\times\Delta r\times 2\times r$$
$$=(a-2r-2\Delta r)^2\times\Delta r$$
$$(2a-4r-2\Delta r)\times 2r=(a-2r-2\Delta r)^2$$
$$4(a-2r-\Delta r)\times r=(a-2r-2\Delta r)^2$$

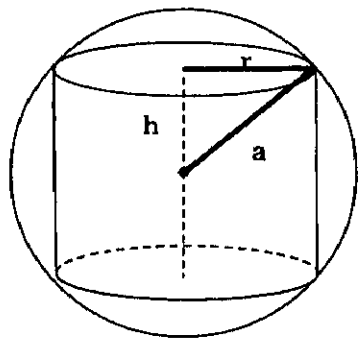
$\Delta r\fallingdotseq 0$　より

$$4(a-2r)\times r=(a-2r)^2$$
$$(a-2r)(a-6r)=0$$

$0<r<\dfrac{a}{2}$　だから　$r=\dfrac{a}{6}$

＜教材例５＞

半径ａの球に内接する直円柱の体積の最大値は？



解）　直円柱の高さを$2h$、底面の円の半径をrとする。

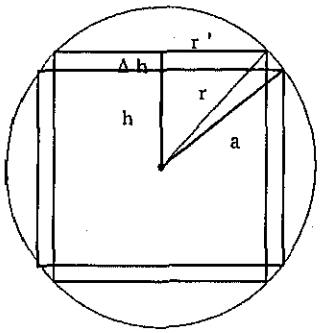
$$r^2=a^2-h^2$$

また、そのときの体積を$V(h)$とすると、

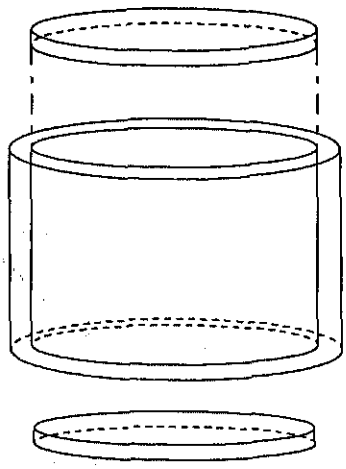
$$V(h)=2\pi a^2h-2\pi h^3$$

hの微小な増加量Δhに対する体積$V(h)$の変化量をΔVとする。

$V(h)$の変化に注目して、ΔVの増加する部分と減少する部分の容積が等しくなるときに最大になる場合がある。



Δhの変化に対して、直円柱の高さの変化が$2\Delta h$と増加し、側面部分が一回り小さくなると考える。
つまり、Δhに対して、ΔVの増加する部分を円板2枚、
減少する部分を円筒と考える。



円板2枚の容積；

$$\pi r'^2\times 2\times\Delta h=2\pi\Delta h\left\{a^2-(h+\Delta h)^2\right\}$$

$$=2\pi\Delta h\left(a^2-h^2-2h\cdot\Delta h-(\Delta h)^2\right)$$

円筒の容積；

$$\left(\pi r^2-\pi r'^2\right)\times 2h=2\pi h\cdot r^2-2\pi hr'^2$$

$$=2\pi h\left(a^2-h^2\right)-2\pi h\left\{a^2-(h+\Delta h)^2\right\}$$

$$=2\pi h\left(a^2-h^2\right)-2\pi h\left(a^2-h^2-2h\cdot\Delta h-(\Delta h)^2\right)$$

$$=4\pi h^2\cdot\Delta h+2\pi h\cdot(\Delta h)^2$$

よって、

$$2\pi\Delta h\left(a^2-h^2-2h\cdot\Delta h-(\Delta h)^2\right)$$

$$=4\pi h^2\cdot\Delta h+2\pi h\cdot(\Delta h)^2$$

$$2\pi a^2\cdot\Delta h-2\pi h^2\cdot\Delta h-4\pi h\cdot(\Delta h)^2-2\pi(\Delta h)^3$$

$$-4\pi h^2\cdot\Delta h-2\pi h\cdot(\Delta h)^2=0$$

$$2\pi a^2\cdot\Delta h-6\pi h^2\cdot\Delta h-6\pi h\cdot(\Delta h)^2-2\pi(\Delta h)^3=0$$

$$a^2-3h^2-3\pi h\cdot\Delta h-(\Delta h)^2=0$$

$\Delta h\fallingdotseq 0$と考え　$a^2-3h^2=0$

$$h^2=\frac{a^2}{3}\quad h>0\text{より}\quad h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

求める体積の最大値は

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}a^3$$

計算の過程で、乗法公式、円柱の体積、平方根、三平方の定理などを用いる場面が出てくるので、中学校でのこの教材の扱いは、1年や2年では難しいと思う。しかし、これらを学習した3年に対しては、今までのまとめの応用教材として、また、高校への繋がりの教材として取り上げることができるであろう。

1年や2年でこの教材を取り上げるための準備段階としての教材を、今後も検討していきたい。

3．4　高等学校での「微分方程式」の指導

微分方程式の中学から高校までの道のり

中学から布石をいかに打つかが肝要である。

カリキュラムの背後にあるねらい

関数の考えの育成
中学：
正負の数（1次元の関数、正負の数の積）、文字式と数列（等差・等比数列）、統計（2変量を表現する）、1次関数と相似（定義域の実数への拡大）、
中学から高校への橋渡し：
2次に比例する関数
（変化率一定でない基本関数）
高校：
2次関数（種々の恒等式変形で、関数の値の変化を調べる）
指数・対数関数（新しい‘ものさし’で考える関数）
三角関数（周期がある基本関数）
3次関数（微少な変化）
超越関数（多項式関数への近似）

3．4．1　中学における関数

中学における関数指導

学校数学において、「関数分野」を生徒が苦手としていることは知られている。この多くの要因の一つは、2つの変数をグラフに表した図形としての問題を取り扱うことが多いためと思われる。本来、変化を捉えることは‘未知との遭遇’のようで感動もあるはずであるが、知識を問うことによって次第に意欲減退が進行するようである。

具体的に、カリキュラムに組み込む教材を考えてみよう。

（1）中学1年：関数の前準備

中1では、関数を定義して考えさせることはしない。しかし、

①統計による指導が関数の事前指導になると考えている。
具体的な変数とそれに伴って変わる変数をグラフに表現することは今後の理数以外の学習でも重要になる。
ここでの関数は式では表現できないが、データをグラフに表現して初めて見えてくるものがある。その‘見えてくるもの’が関数の指導の本質でもある。

（参照）本稿3．1　中学での「統計」の指導

②文字式では、数列の規則を考えさせることで、
生徒は関数として理解することは少ないが、それを意識させるような指導も欠かせない。

例）マッチ棒で正方形を横につなげて並べるとき、正方形の個数とマッチ棒の本数との関係を式で表現すると、

マッチ棒の本数	4	7	10	13	16		?
正方形の個数	1	2	3	4	5		n

正方形がn個できるためには、マッチ棒が$3n+1$本必要である。

関数には独立変数から従属変数へと変えるための規則があるが、数列ではその規則を発見し、関数として後々見ることができるようになる‘関数指導の前準備’としても極めて重要である。

③　関数の記法について

$f(\ \ )$に慣れさせることも課題の一つである。

上記の例であれば、$f(n)=3n+1$

関数本来は$f(\ \ )=3\times(\ \ )+1$　と表現するべきところを便宜上（慣習上）、上記のように表現している。この（ ）を用いることで、事は容易になる。

理解できたかは、この関数で、$f(n+1)$を計算させてみればよい。

高校では、$a_{n+1}=f(a_n)$で数列を定義する。

（2）中学2年：1次関数で事始め

中学1年の数列で学習した「等差数列」を式で表現したものを使う1次関数が主体である。

1次関数の特徴は、1当たり量が一定であることである。このことは、グラフを平行移動しても関数の値の差は一定であることを意味している。

これは、変数を自然数に限定すれば、等差数列の‘公差’そのものである。

$F(n+1)-F(n)=$一定　（1当たりの変化量）

関数値の差が一定であるが、それはすなわち独立変数の変化量の差の比例倍ということである。

定義域を実数まで拡大するために、相似を利用して考える。

等比数列について、中学では、記数法で学習できる。

10 進法　$999999_{(10)}+1_{(10)}=1000000_{(10)}$ と同様に、

2進法の桁上がり

$111111_{(2)}+1_{(2)}=1000000_{(2)}$　を学ぶ。

これは、10進法では

$$(2^5+2^4+2^3+2^2+2+1)+1=2^6$$

のことであり、$\sum_{k=1}^{5}2^k=2^6-1$

$$(3\times4^5+3\times4^4+3\times4^3+3\times4^2+3\times4+3)+1=4^6$$

$$3(4^5+4^4+4^3+4^2+4+1)+1=4^6$$

後に、高校でΣ記号を用いれば、$3\sum_{k=1}^{6}4^{k-1}+1=4^6$

ゆえに、$\sum_{k=1}^{6}4^{k-1}=\frac{4^6-1}{3}=\frac{4^6-1}{4-1}$

このようにして、中学の低学年から少しずつ等比感覚（関数感覚）を養うことが大切と考えている。

また、無限小数である、$0.\dot{9}$ についての理解が極限の理解を早めると考えている。

$0.\dot{9}=1$

この等号の意味が極限であることを指導しておくことが後々の布石になる。

（3）中学3年：2次に比例する関数

$$f(x)=ax^2$$

変化の割合：x が p から q まで変化するとき、

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

特に、p,q が連続する自然数の場合には、

この分子は、第1階差そのものである。

$$f(x+1)-f(x)=a(2x+1)$$

であり、1次関数の第1階差が定数であることから、2次関数の第2階差は定数であることがわかる。実際、

$$\{f(x+1)-f(x)\}-\{f(x)-f(x-1)\}$$

$$=a(x+1)^2-2ax^2+a(x-1)^2$$

$$=2a\ (\text{一定})$$

3．4．2　高等学校における関数指導

（1）　高校1年：2次関数を中核として

恒等式として、2次式のいろいろな変形を試みる。式変形になれること。グラフにして見えてくるものだけではなく、式変形すると見えてくるものがある。

2次関数のグラフ上での点での接線を代数的に考えてみよう。

$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 上の点 $P(p,f(p))$ での接線を求めるには微分係数は不要である；

$$y=f(x)=a(x-p)^2+(2ap+b)(x-p)+f(p)\cdots①$$

と変形できる（$x=p$ でのテーラー展開）から、

これに対して、$y=(2ap+b)(x-p)+f(p)$　…②

を考えると、①，②の連立より、$x=p$(重解) であることから、②は①の接線であることが分かる。

つまり、接線を求めるだけなら、多少面倒な恒等式の変形ではあるが、テーラー展開の式を作り出せばすむことである。

（2）　高校2年：3次関数他いろいろな関数

3次関数で、極大・極小、増加・減少、変曲点等を学ぶ。

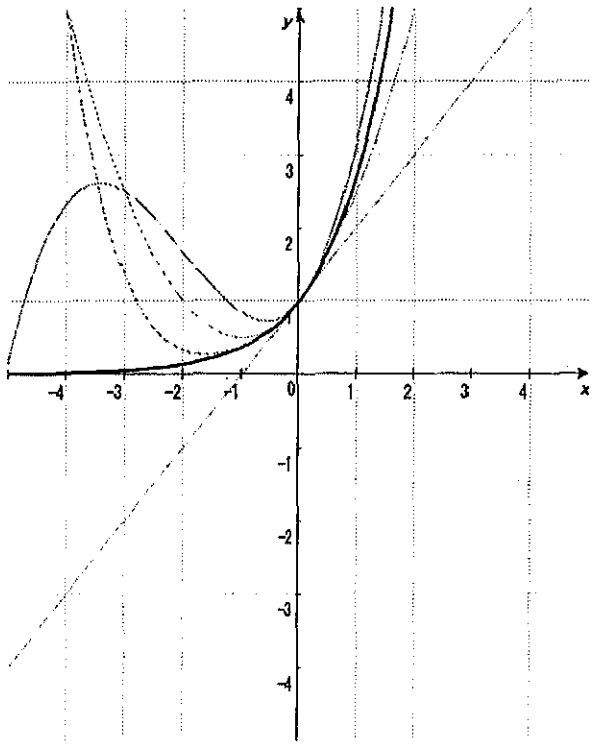
対数関数では、'新しいものさし' 対数グラフ用紙を用いたデータプロットとそれから関係式を作ることが興味深い。これは、座標系を代えると見え方が変わることを実感できる数学的活動である。

次の§3.4.3で詳しく述べる。

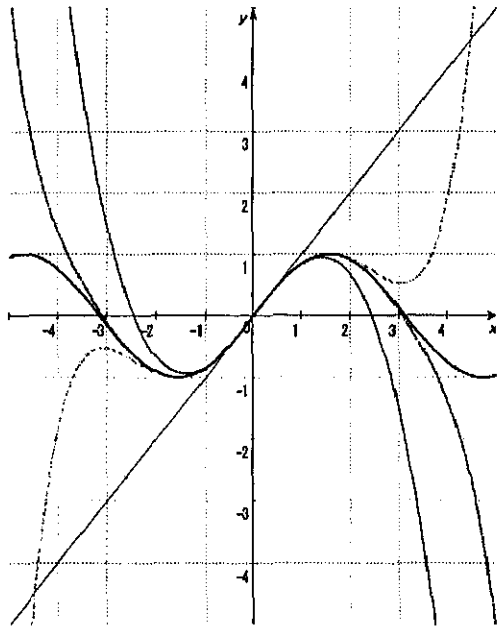
（3）　高校3年

超越関数について学習する。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$



3．4．3　微分法の指導

(1)　微分指導の問題提起

微分というと、高等学校では‘接線の傾き’ つまり、2点間を近づけて、その直線の傾きの極限として直感的に理解させることが主たる指導法である。一方、大学の先生は‘一次近似’をなぜ高等学校で教えないのかとの声もある。しかし、$dy = f'(x)dx$ なる一次近似が微分であると言っても高校生に簡単に理解してもらえるものではない。座標系が $\{dx, dy\}$ という接平面を考えているからである。

一方、「数学Ⅱ」で扱う関数は、多項式関数（整関数）である。§3.4.2で示したように、多項式関数を恒等式で変形（‘テーラー展開’）すれば重解で接することが見える。逆に言えば、高2で微分を学習する目的は、導関数を求めることが主目的ではない。だとすると、「数学Ⅲ」への準備かというと、「数学Ⅲ」は全員選択ではないから問題が残る。では、「数学Ⅱ」で微分を指導する目的は何なのか？

(2)　生徒の困難点

生徒にとって、微分の定義に含む極限の概念はこれまでの学習では出現していない。過去の学習指導要領では数列の学習の際に極限を学び、その後に微分を学習した。ところが、現行学習指導要領では、いきなり極限が入る。微分の難しさのひとつはこの極限にあると言っても過言でないだろう。極限とは何かの説明が少ないと思われる。

高1で、極限概念をつかませる必要がある。

- ○　極限値とは何なのか？
- ○　限りなく近づくとはどういうことなのか？　表現方法に工夫が入る余地がある。

数列とは独立に極限を学習できないか。

数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　を

「$n \to \infty$ のとき、a_n は限りなく α に近づく」では、生徒は「実際にα になるのか、ならないのか分からない」という。これを例えば、『$n \to \infty$ のとき、a_n はα を目標値として変化する。この目標とする値を極限値という。』としてはどうだろうか。　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ と

$\dot{0.9} = 1$　つまり　$\lim_{n\to\infty}\frac{0.9\{1-(0.1)^n\}}{1-0.1} = 1$

とでは、後者は無限循環小数の分数化であり、生徒にとって前者とは異なると感じるようである。

そこで、共通に、$\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$　という「差が0に近づくこと」の表現の方を提案したい。

微分（導関数）の定義では、さらに$\Delta x \neq 0$として0に近づけ、さらに比を考えるのである。素直に理解する方が不思議なくらいである。$\Delta x \neq 0$だから微小／微小を考えなければならないのである。

(3) そもそも微分とは何か？

'微分'そのものの定義は高等学校の教科書にはない。'微分係数'とか'導関数'とかの名詞はある。また、'微分する'という動詞もある。しかし、微分dyは高校教科書には登場しない。そこで、ここでは'微分'という名詞を使わず、'微分する'という動詞を採用し、「微分するとは何か？」を考えることにする。

ところで、光には2つの顔｛波動性と粒子性｝がある。また、複素数には2つの顔｛点の位置と回転拡大｝がある。微分法にもいくつかの顔があるはずだ。

定義や公式だけでは'微分する'とは何をすることかはわからない。

'微分する'に関する見方・考え方として、

A：接線の傾き…主として微分係数

B：1次近似…最小自乗法、局所座標系

C：微小な変化で生まれること

…導関数を求める，極値問題（導関数を作る）

D：瞬間変化率…瞬間速度，円の面積とその円周，球の体積とその表面積など

が考えられる。

(4) 導関数の定義の見直し

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \cdots★$$

この定義式の代数化と近似化（デジタル化）を考える。極限を含む解析的理解の一歩手前の代数化、つまり近似化を考える。微小な正の数Δxをここでは、$\Delta x = h$とおき、近似を考えることにする。

以降、'微分する'ことのいくつかのアイデアを紹介する。

瞬間速度を求めることを考える際、すなわち接線の傾きを考えるとき、まず天下りに割線を与え、その極限を考えさせるのは動機付けとして不十分である。

多項式関数ならば式変形で代数的に求められるものを何故に、2点を用意するかを天下りでなく持ち出すことが鍵である。

これこそが、微分する重要性の中核である

C：微小な変化で生まれること

それまで見えなかったものが見えてくるために、独特の考え方があることを学ぶ。

曲線上の1点Pでの接線（の傾き）を考えることは難しい。生徒は、曲線にあてがうような適当な直線を描けると考えている。

接線の定義：接線とは、曲線上の接点の近傍で瀬点以外に曲線との共有点がない直線のことである。

これを否定して、共有点があったとすると考えることになる。（素数と合成数との関係に似ている）そこで、ダミーとして、ちょっとずれた他の1点や2点を考えることの必要性を理解させたい。

(5) 接触円

生徒にとって曲線に接する直線とは中学のときに学習した円の接線（円の中心と接点を結ぶ直線に垂直）が基本である。ここでは、2次関数のグラフである放物線上の点で接する円を考えてみる。

ところで、次の曲率の公式が知られているが、高校生には難しい。

「曲率の公式：関数$y = f(x)$上の点$(a, f(a))$で接する円の半径をrとすると、曲率は、$\frac{1}{r}$であり、

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(a)}{\left\{(f'(a))^2 + 1\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

である。」

これは、接触円の半径は分かるが中心は不明である。

ここで、中学生の知識である「一部が破損した皿の土器が出土したとき、その円の半径を求めるときに、3点でできる三角形の外接円を作るために、垂直2等分線2本の交点としての中心」を求めたことを思い出させる。微分の捉え方Cの微小な変化によって見えないものが見えてくることを経験させる。

'接する点Pからちょっとずらした別の2点を考える'ことで、この3点を通る円が作れることになる。ここに微分することの幾何学的な側面がある。

微小な変化に伴って新たなものが生まれるひとこまである。

放物線上に3点をとる：

$$A(p-\frac{1}{n}, (p-\frac{1}{n})^2),\ P(p, p^2),\ B(p+\frac{1}{n}, (p+\frac{1}{n})^2)$$

次のように、線分APの垂直二等分線①と線分BPの垂直二等分線②を作り、その交点を求める。接触円の中心を求める。

$$\mathrm{AP}：y = -\frac{n}{2pn-1}(x - \frac{2pn-1}{2n}) + (\frac{2pn-1}{2n})^2 \quad ①$$

$$\mathrm{BP}：y = -\frac{n}{2pn+1}(x - \frac{2pn+1}{2n}) + (\frac{2pn+1}{2n})^2 \quad ②$$

交点の x 座標は、$x=-4p^3+\frac{p}{n^2}$ であり、

極限は、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ などによって、円の中心は、$(-4p^3,3p^2+\frac{1}{2})$ であり、半径 r は、$\frac{(4p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}$ であることがわかる。

これは、曲率 $\frac{1}{r}=\frac{2}{((2p)^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ から正しいことが確認できる。

接触円：

$$(x+4p^3)^2+(y-(3p^2+\frac{1}{2}))^2=\left\{\frac{(4p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}\right\}^2$$

特に、$p=1$ の場合、接触円の中心は $(-4,\frac{7}{2})$ である。

接点は、(1,1) であり、接触円の半径は $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ である。

念のため、曲率半径の公式からは、$y'=2x$, $y''=2$ であるから、

$\frac{1}{r}=\frac{2}{(2^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$ より、$r=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ と一致する。

接触円をシュミレーションしてみたのが図１である。

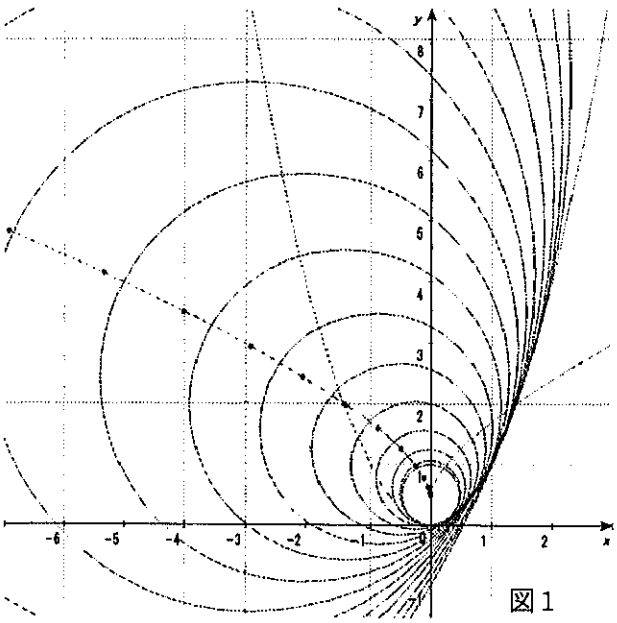


図１

接触円の中心の軌跡は、

$\begin{cases}x=-4p^3\\ y=3p^2+\frac{1}{2}\end{cases}$ によって、$y=\frac{1}{2}+\sqrt[3]{\frac{27x^2}{16}}$ である。

(6)　導関数を作る

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\cdots\star$$

この★の式は、

$h\to 0$ のとき、$|f(x+h)-(f(x)+f'(x)h)|\to 0$

と同値である。

$$dy=f'(x)dx$$

１次近似

このイメージは距離＝速さ×時間　に過ぎない。これは「正負の数の乗法」の高校版である。

近似化することで見えてくること：

$f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を考えてみよう。

定義式を、$f(x+h)-f(x)\approx f'(x)h$　と近似式を考える。$f(x+h)-f(x)\approx f'(x)h$

ここでの関数は、

$y=f(x)$　・・・①

$y=f(x+h)$ ・・・②

$y=f(x+h)-f(x)$ ・・・③

がある。

$y=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ・・・④

$y=f'(x)$　・・・・・・⑤

④は③を y 軸方向に拡大したものである。

近似で正確さを心配する生徒には、

$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h)$

ここで、誤差 $o(h)$ は、$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$ であると説明する。たとえば、図２において、h が極めて０に近いときには、誤差 ah^2 が０に極めて近い。図２の場合は、h が極めて小さい正の数のとき、誤差を無視できる。よって、これ

はhが極めて小さいとき、

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

つまり、

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h$$

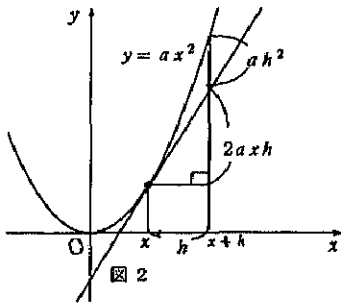


図2

この式の新しい見方：

<1> 左辺は「(微小な変化で引き起こされる) 差」であり、右辺の'導関数'は「比（と微小な変化の積)」である。

<2> 「比」を考える代わりに「差」を考えることを示唆している。

これは、難しい「比」を近似化し、見えるものに変えることでもある。

<3> 「差」を作ることが大切で、それにはダミーが欠かせない。極限とはダミーという比較対象を消去することとも言える。

(7) 最大最小（極値問題)

$y=-x(x-6)$と、定点$A(4,5)$を通る直線ℓとで囲まれた図形の面積が最小となるのは、ℓがどのようなときか？

積分計算せずに、直接、導関数を計算する；

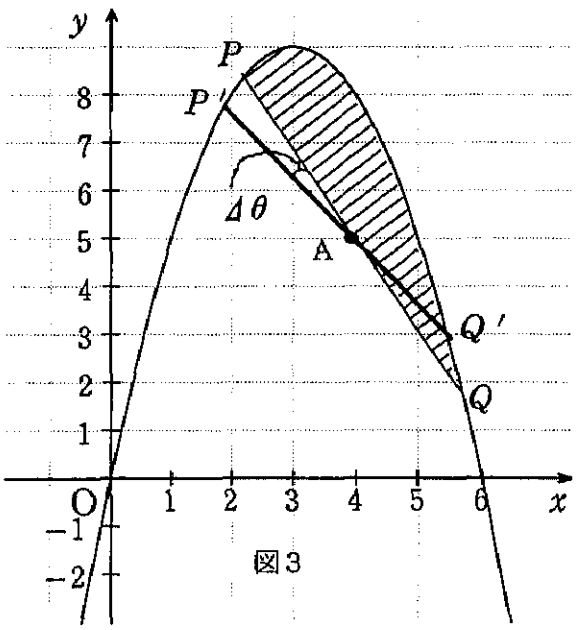


図3

$$\Delta S=\frac{1}{2}a^2\sin\Delta\theta-\frac{1}{2}b^2\sin\Delta\theta$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)\sin\Delta\theta$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)\Delta\theta$$

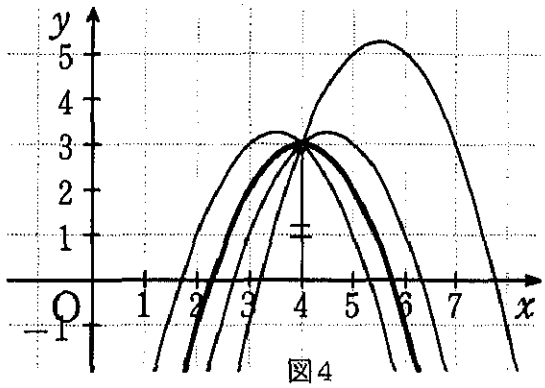


図4

$a=b$のとき、最小である。これは、定点Aとx座標が同じグラフ上の点$(4,8)$での接線と平行な直線のときである。図3とカバリエリの原理で描いた図4を比較するとよい。

(8) 導関数のグラフの描き方

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h$$

左辺は差、右辺は比（とずれの積）を表している。

左辺は導関数、右辺は任意の点での微分係数

とも読める。大胆な表現をすれば、導関数とは"ちょっとのずれ"をy軸方向無限に拡大したものと言える。導関数の重要なことは、正負、0となる変数の区間等であって、グラフの大ざっぱな概形を描くときは、微分係数の大小は重要であるが、個々の値そのものについてはあまり関心がない。

左辺の差のグラフ$y=f(x+h)-f(x)$を

描くことで、右辺の比のグラフ$y=f'(x)$を描くことが可能になる。

＜導関数のグラフの描き方＞

元になる基本的な関数のグラフがすでに描けている場合に、その導関数（それらの加減乗除の関数の導関数）のグラフがどうなるか、微分計算を用いず（関数の式がない場合も含め）にグラフの概形を描いてみる。

1） 各点での接線の傾き（微分係数）の大きさを調べながら描く。

「比べる」とは、‘比’と‘差’

2） 関数の微小な変化を利用した導関数の定義による方法

1）を連続的に実行するために2）を付け加えた学習をする。

「$y=f(x+h)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向 $-h$ だけ平行移動したものである。」

この発見によって、事態は急展開する。グラフを描いて、その差およびそれを拡大したグラフを描いてみたのが図5～図7である。描く際の要領は、平行移動によって、2つのグラフが x 軸に平行に近いほど差は小さく、y 軸に平行に近いほどその差は大きいことである。

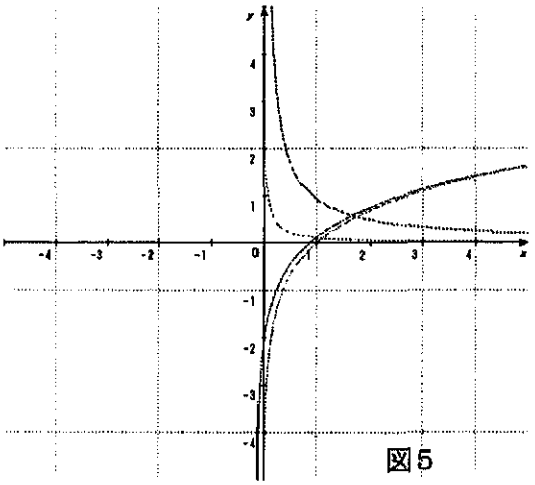


図5

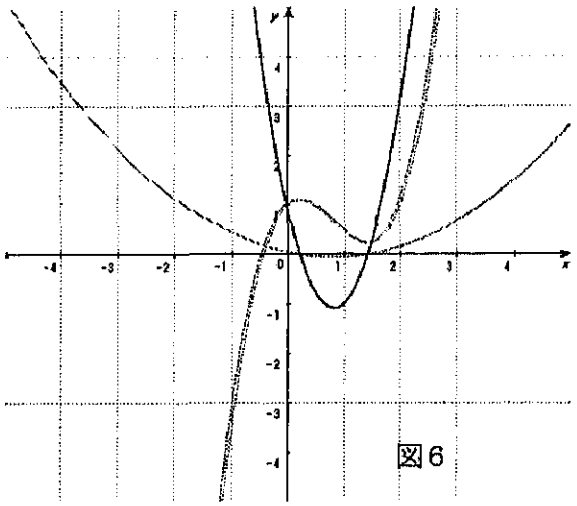


図6

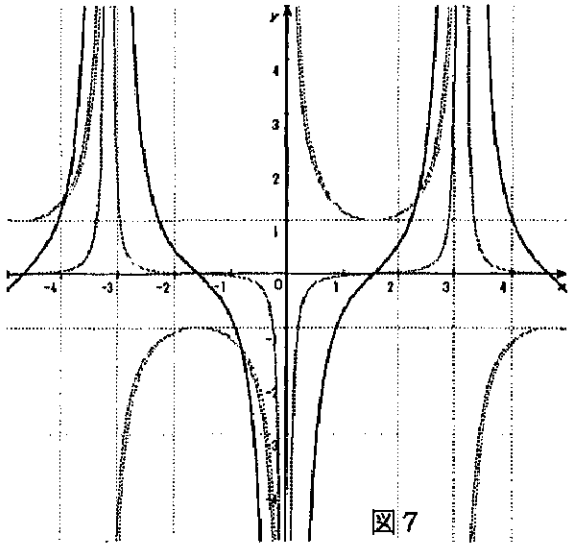


図7

これによって、導関数が未知の関数である指数関数 $y=2^x$，対数関数 $y=\log x$，三角関数 $y=\sin x$、分数関数などの導関数を簡単にチェックできるところが優れている。

$f(x)$ のグラフ与えて $f'(x)$ のグラフを描いたり、$f'(x)$ のグラフを与えて $f(x)$ のグラフを描いたりすることを授業で扱い期末考査にも出題した：生徒は工夫してグラフを描くことに興味を持った。後者はまさに微分方程式を解いていることになる。

$y=f'(x)$ のグラフから、$f(x)=\int f'(x)dx$（初期条件付き）のグラフを考えさせる。こちらの方が描きにくさがある。

3．4．4　微分計算の基本公式導出

n次多項式関数について

①単項の微分　$f(x)=x^n$ の微分

$$f(x+h)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+(h^2\text{を含む項})$$

$$=f(x)+nx^{n-1}h+(h^2\text{を含む項})$$

よって、$f'(x)=nx^{n-1}$

②合成関数 $f(x)=(ax+b)^n$ の微分

$$f(x+h)=(a(x+h)+b)^n=((ax+b)+ah)^n$$

$$=(ax+b)^n+n(ax+b)^{n-1}ah+(h^2\text{を含む項})$$

$$=f(x)+n(ax+b)^{n-1}ah+(h^2\text{を含む項})$$

よって、$f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+(h^2\text{を含む項})$$

$$g(x+k)=g(x)+g'(x)k+(k^2\text{を含む項})$$

$$f(g(x+k))=f(g(x)+g'(x)k+k^2\text{を含む項})$$

$$=f(g(x))+f'(g(x))(g'(x)k+(k^2\text{を含む項}))+(k^2\text{を含む項})$$

$$=f(g(x))+f'(g(x))g'(x)k+(k^2\text{以上を含む項})$$

微分の線形性に関して

③項別微分

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

$$f(x+h)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n)$$

$$+h(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1})+(h^2\text{を含む項})$$

$$\therefore f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}$$

④テーラー展開（マクローリン展開）

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f'''(x)=3\cdot2\cdot1a_3+4\cdot3\cdot2a_4x+5\cdot4\cdot3a_5x^2+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2a_2,$$

$$f'''(0)=3\cdot2\cdot1a_3,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=n!a_n$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

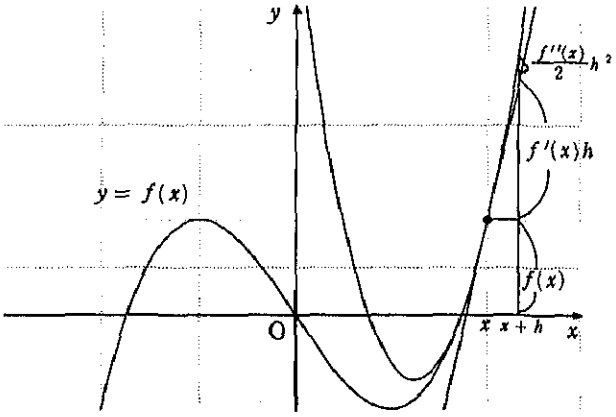
⑤近似式を作る　　③、④より、

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

例）$(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+h^3$$

⑥数列（差分）とのリンク（近似式と誤差）



$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\quad,\quad f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(x)dx$$

分点を $x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$ と決め、

$x_k+h=x_{k+1}$

$f(x_k)=a_k$, $f(x_{k+1})=a_{k+1}$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$　とおく。

$\frac{dy}{dx}\cong\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}=\frac{a_{k+1}-a_k}{h}$ とおくと、微分（連続）から差分（離散）へと近似できる。

$a_{n+1}=a_n+h\cdot f'(x)$,　　＊と同様にして、

$a_{k+1}=a_k+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ と近似式で表現でき、

$$a_{n+1}=a_n+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=a_0+\sum_{k=0}^{n}f'(x_k)(t_{k+1}-t_k)$$

ここで、$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$=定数 ならば、$\{a_n\}$は等差数列、$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=ra_n$ ならば、$\{a_n\}$は公比$1+r$の等比数列である。

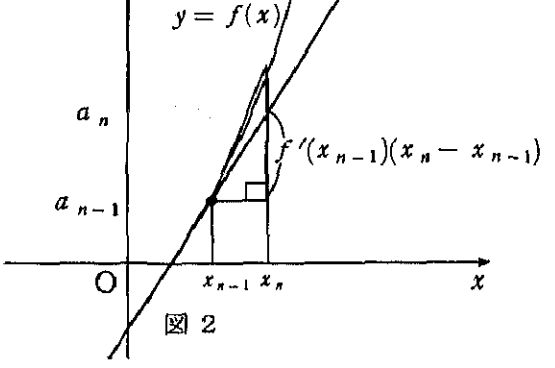


図 2

3．4．5　$f'(x)$の正負の変化と$f(x)$のグラフの凹凸

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2 \quad \cdots①$$

3点$A(t,f(t))$，$B(t+h,f(t+h))$，$C(t+2h,f(t+2h))$

を通る放物線を調べる：2次の係数をaとおくと、

2点A，Bを通るすべての放物線は$t-y$座標平面で、

$$y=a(x-t)(x-(t+h))$$

$$+\frac{f(t+h)-f(t)}{h}(x-t)+f(t)$$

であるから、これが、点Cを通るから、

$$f(t+2h)=a((t+2h)-t)((t+2h)-(t+h))$$

$$+\frac{f(t+h)-f(t)}{h}((t+2h)-t)+f(t)$$

ゆえに、

$$f(t+2h)=2ah^2+2\{f(t+h)-f(t)\}+f(t)$$

$$a=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{2h^2}$$　これと①から、

$$f''(0)=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}$$

3．4．6　母関数と微分方程式

微分方程式を解く際に、変数分離法や積分、$x=e^{rt}$（rは複素数）　と仮定する置換
やラプラス変換などがある。これらで解けないときは、含まれる関数をテーラー級数で近似するか、解となる関数$x=f(t)$がテーラー級数

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$（収束を考えない級数を母関数とよぶ）に展開されると仮定して解く方法である。それでも解けない場合は、コンピュータを利用たて数値解析（ルンゲ・クッタ法など）を用いて解く。

ここでは、母関数の多項式関数の係数に着目して、係数の漸化式を作成し、その解を求めて、関数を決定する方法である。

原理：xを従属変数、tを独立変数とする微分方程式の未だ分かっていない解を

$$x=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

・・・①と仮定する。

微分方程式に含まれる、$\frac{dx}{dt}$，$\frac{d^2x}{dt^2}$を①で計算し、元の微分方程式に代入する。

このとき、係数の数列$\{a_k\}$に関する漸化式が得られる。

この漸化式が解ければ級数が決定される。この級数に相当する関数を探し出せれば、これが求める解（関数）である。

例1）　バネの振動を表す微分方程式：

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})+cx=0$$　つまり、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0$$　　初期条件は、$t=0$のとき、

$x=x_0,\frac{dx}{dt}=0$とする。

[これは、質量M（kg）のおもりを、長さ（m）のひもでぶら下げた振り子の運動方程式を考えると、ひもの張力T（kg・m／s²）と重力Mg（kg・m／s²）
接線方向の重力成分は、Mg $\sin\theta$であるから、接線方向の移動量をx（m）とすると、

運動方程式は、$M\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{Mg}\sin\theta$　で、角θが小さい場合は、$\sin\theta\fallingdotseq\theta$であり、$x=\ell\theta$とするとき、

$\ell\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{g}\theta$を書き換えた式である]

解法)

$$x=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

とおく、

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)=2a_2+3\cdot2a_3t+4\cdot3a_4t^2$$

$$+\cdots+(n+1)na_{n+1}t^{n-1}+\cdots$$

ここで、初期条件を考えて、$a_0=x_0$，$a_1=0$

$$x = x_0 + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots + a_nt^n + \cdots$$

$$cx = cx_0 + ca_2t^2 + ca_3t^3 + \cdots + ca_{n-1}t^{n-1} + \cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + cx = (2a_2 + cx_0) + (3\cdot 2a_3)t + (4\cdot 3a_4 + ca_2)t^2 + \cdots + ((n+1)na_{n+1} + ca_{n-1})t^n + \cdots$$

$$2a_2 + ca_0 = 0,$$

$$3\cdot 2a_3 = 0$$

$$4\cdot 3a_4 + ca_2 = 0$$

・・・・・・・・・・

これより、漸化式は、

$$(n+1)na_{n+1} + ca_{n-1} = 0$$

奇数項は0で、偶数項は、 $a_2 = -\frac{1}{2}cx_0$,

$$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}ca_2 = \frac{1}{4!}c^2x_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}ca_4 = -\frac{1}{6!}c^3x_0, \cdots$$

これより、

$$x = x_0(1 - \frac{1}{2!}ct^2 + \frac{1}{4!}c^2t^4 - \frac{1}{6!}c^3t^6 + \cdots)$$

ここで、$z = \sqrt{c}t$ とおくと、

$x = x_0(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots)$ これは、$\cos z$ のテーラー級数展開であるから、

$x = x_0\cos z = x_0\cos\sqrt{c}t$ これが求める解である。

生徒には、単振動 $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$ (物理でも出てくる形) を考えさせるのがよい。

3．4．7 オイラーの定理を導く

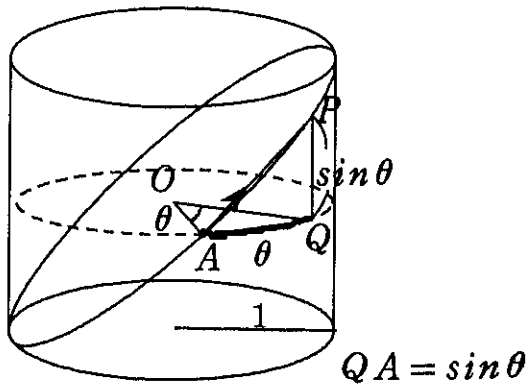
(1) $y = f(x) = \sin x$ の導関数

3.4.6の方法で求める。

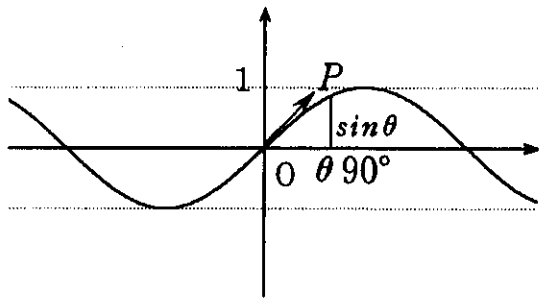
半径1、高さ2の円柱を図のように45°で切断すると、$PQ = \sin\theta$ だから、切り口を展開すると、そのグラフはサインカーブとなる。

また、点Aでの接線の傾きは切断角度から1であることと、3.4.3.(8)で示した導関数の描き方によって、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ とわかる。

さらに、$\cos x$ の導関数が $-\sin x$ であることも確認できる。微分方程式 $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ の母関数を決定する。



$QA = \sin\theta$



$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

これより、$2a_2 = -a_0$, $3\cdot 2a_3 = -a_1$,

$4\cdot 3a_4 = -a_2$, $5\cdot 4a_5 = -a_3$,$\cdots$,

$n(n-1)a_n = -a_{n-2}$,$\cdots$

よって、

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$f'(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

(2) 微分方程式$f'(x)=f(x)$について

$f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$を満たす関数$f(x)$を求める。3.4.3(8)の導関数のグラフ描画方法によって、単調で変曲点がないことがわかる。
そこで、

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

これらから、$a_0=1, a_1=1$ と

$2a_2=a_1$, $3\cdot 2a_3=a_2$,

$4\cdot 3a_4=a_3$, $5\cdot 4a_5=a_4$,$\cdots$,

$n(n-1)a_n=a_{n-1}$,$\cdots$ によって、

$$a_n=\frac{1}{n!}$$

つまり、

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\vdots$$

これを、e^xと定義する。

つまり、

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

ここで、右辺のxにixを代入すると、

$$1+(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^n+\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots)$$

$$+i(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

これをe^{ix}と定義すると、

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

これをオイラーの定理という。
このことで、指数関数と三角関数を、多項式関数を仲介とし、数列と微分の手法によって、橋を架けたことになる。すごいことだ！

まとめ

このような学習により、中学・高校で学ぶ関数はすべて皆仲間であることがわかる。このようして学校数学の‘統一場理論’ができればいいなーと感じている。

３．５　特別講座からの教材

ＳＳＨ事業に関連して２００２年度から希望者を対象に特別講座を開講している。これらの内容を授業で取り上げるための教材化について、いくつか検討したものを紹介する。

３．５．１　暗号理論と整数論

２００２年７月１７日，本校４４期卒業生である伊藤哲史氏によるＳＳＨ特別講座『暗号理論と整数論』が開講された。希望者対象ながら多くの在校生の受講があり，アンケート結果も大変好評であった。この講義をもとに，実際に教室で活用できる教材を考えたい。

フェルマーの小定理は実際につい最近高校１年数学Ａ「二項定理」の授業で取り上げた。また，暗号については数年前中学３年の総合学習の中で取り組んだことがある。

1　流れ

（1）	暗号とは
（2）	準備 組合せ，合同式，二項定理
（3）	フェルマーの小定理
（4）	ＲＳＡ暗号のしくみ
（5）	ＥｌＧａｍａｌ暗号について
（6）	最新トピック『楕円曲線暗号』

2　暗号とは

暗号とは，当事者でのみ解読できるように取り決めた特殊な記号や文字のことである。これに対し誰でも解読できる通常の文を平文，平文を暗号に変える仕組みを暗号化鍵，暗号を平文に変える仕組みを復号鍵という。暗号は情報を秘密に伝えたり，相手を認証したりするのに用いる。

古典的な暗号の多くは，シーザー暗号のような換字式であった。

例　３文字ずらす

Ａ→Ｄ，Ｂ→Ｅ，Ｃ→Ｆ

暗号化鍵は＋３，復号鍵は－３

このようなシーザー暗号は，統計的攻撃（英文にはＥが多いなど）に弱いなどの欠点があった。

１９７６年に提案された新しい方式が公開鍵暗号で，暗号化鍵から復号鍵を簡単に求められないように設計するものである。暗号化鍵は公開してしまう。この方式では，送信者と受信者があらかじめ鍵を交換する必要がなく，不特定多数の人々との交信が可能である。現在知られている公開鍵暗号は

・　ＲＳＡ暗号

　世界初の公開鍵暗号。素因数分解の困難さを利用している。

・　ＥｌＧａｍａｌ暗号

　離散対数問題の難しさを利用している。

・　楕円曲線暗号

　楕円曲線の群構造における楕円離散対数問題の難しさを利用している。

これらは全て整数論の問題の難しさを利用している。

3　準備

・　組合せ　$_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

例題　７人から３人の委員を選ぶ方法は

$$_7C_3 = \frac{7!}{4!3!}$$

・　合同式

２つの整数ａ，ｂが，自然数ｍを法として合同であるとき，ａ≡ｂ（ｍｏｄｍ）とかく。

例題　１７ｘ－２１ｙ＝１

　　を満たすｘ、ｙをひとつ求めよ。

　１７ｘ≡１（ｍｏｄ　２１）より

　２１ｘ≡０（ｍｏｄ　２１）を引くと

　－４ｘ≡１（ｍｏｄ　２１）４倍すると

－１６ｘ≡４（ｍｏｄ　２１）

これをはじめの式に足し，ｘ≡５（ｍｏｄ　２１）

よって（５，４）をこれを満たす。

・　二項定理

（ｘ＋ｙ）^{n}＝

$$_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \cdots + {}_nC_ny^n \quad n$$

例題　（ｘ＋ｙ）^{5}を展開すると

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

4 フェルマーの小定理

pが素数でaが整数の時

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

二項定理により，

$(x+y)^p =$

$$x^p + {}_pC_1x^{p-1}y + {}_pC_2x^{p-2}y^2 + \cdots + {}_pC_rx^{p-r}y^r + \cdots + y^p$$

pが素数ならば，$${}_pC_r = \frac{p!}{(p-r)!r!} \quad (1<r<p)$$

はpの倍数である。なぜなら，1＜r＜pなるrにpの約数がないからである。

x，yが整数の時

$(x+y)^p =$

$$x^p + {}_pC_1x^{p-1}y + {}_pC_2x^{p-2}y^2 + \cdots + {}_pC_rx^{p-r}y^r + \cdots + y^p$$

の右辺のうち両端以外の項はpの倍数になるから

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

ここでx＝y＝1を代入すれば

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

$k^p \equiv k \pmod{p}$ を仮定してx＝k，y＝1

を代入すれば$(k+1)^p \equiv k^p + 1^p \pmod{p}$

となり，数学的帰納法で$a^p \equiv a \pmod{p}$がいえる。

pが素数でaがpと互いに素である整数の時

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

aがpと互いに素である整数ならば，

$a^p \equiv a \pmod{p}$ の両辺をpで割ることが出来る。

例題　13は素数なので

29^{12}を13で割ったあまりは1である

5 RSA暗号のしくみ

RSA暗号は、異なる二つの素数p，qをかけあわた数pqを法として利用する。この世界では，数はべき乗されるたびに変化するが，ある乗数になると，すべての数が自分自身に戻る。公開鍵で暗号化したものは，シーザー暗号のように逆算して復号することはできず，ペアとなる秘密の鍵で暗号を更にべき乗して元の数に戻す。

始めに選んだ2つの素数が十分大きければ，その積pqからe素因数分解によってpとqを求めることは困難である。RSA暗号の安全性の根拠はここにある。現在200桁程度の合成数を素因数分解するのに，スーパーコンピューターで10兆年かかると言われる。

例題　2×5＝10を法とする累乗表を作れ。

	1乗	2乗	3乗	4乗	5乗
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	6	2
3	3	9	7	1	3
4	4	6	4	6	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	9	3	1	7
8	8	4	2	6	8
9	9	1	9	1	9

すると，1から 9までの全ての数は、べき乗する度に変わっていくが，全ての数は5 乗すると自分自身に戻っている。したがって，5＋4n（nは非負整数）乗すると，必ず自分に戻ることになる。

このように、2つの素数p，q をかけた数を法とする世界では、全ての数が自分自身に戻るべき乗数が必ず存在する。このとき、全ての数が自分自身に戻るべき乗数は、p－1、q－1 の公倍数+1と表すことができる。

p，qを素数（p≠q），E，Dを整数とする。
E×D≡1 (mod (p-1)(q-1)) ならば，

任意の整数Mに対し$\left(M^E\right)^D \equiv M \pmod{pq}$

証明

$E \times D \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ とする。

任意のMに対し

$$\left(M^E\right)^D - M = M^{ED} - M$$

$$= M^{\{1+k(p-1)(q-1)\}} - M$$

$$= M\left(M^{k(p-1)(q-1)} - 1\right)$$

$$= M\left(M^{k(p-1)(q-1)} - 1\right)$$

ここで，Mとpが互いに素なら，$M^{k(q-1)}$ とpも互いに素であるから，フェルマーの小定理により，

$\left\{M^{k(q-1)}\right\}^{p-1}$ をpで割った余りは1である。

したがって $M^{k(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{p}$

$M^{k(p-1)(q-1)} - 1$ がpの倍数であるから，

$\left(M^E\right)^D - M$ はpの倍数である。

もし，Mとpが互いに素でないなら，pは素数であるからMはpの倍数である。したがってこのときも

$\left(M^E\right)^D - M$ はpの倍数である。

同様なことがqにもいえるから，

$\left(M^E\right)^D - M$ はqの倍数である。

よって $\left(M^E\right)^D - M$ はpqの倍数である。

$\left(M^E\right)^D - M \equiv 0 \pmod{pq}$ より

$$\left(M^E\right)^D \equiv M \pmod{pq}$$

RSA暗号の作り方

1) まず素数p，qを選び，n＝pqとする
2) 暗号化するための暗号鍵Eを決める
   ここでEは（p－1）（q－1）と互いに素であるようにする。そうしないと，異なる数が同じ数に変換される現象が起きる。
3) 暗号化したい数（nより小さい）をE乗してnで割った余りが暗号x

暗号の解き方（復号化）

4) 復号鍵Dを求める
   DはE×D≡1 (mod (p-1)(q-1)) を満たすので
   この不定方程式を解くことでDを求める。
6) 暗号xをD乗しnで割った余りがもとの数（平文）

例題　法を3×5とする

① 15を法とするの累乗表では，何乗すれば全ての数が自分に戻るか。
② 暗号鍵3をとしたとき，復号鍵は何か。
③ 平文13を暗号にせよ。
④ それを復号して確認せよ。

解説

① n＝15のとき，（p－1）（q－1）＝8
よって，E×D≡1 (mod 8) のとき
ならば $\left(M^E\right)^D \equiv M \pmod{15}$
よって全ての数は9乗すると自分自身に戻る。

② 3D≡1 (mod 8) を解く。法を8として
8D≡0，9D≡3よりD≡3
復号鍵も3

③ $13^3 \equiv 7 \pmod{8}$ より暗号文は7

④ mod 15の累乗表より確認

	2乗	3乗	4乗	5乗	6乗	7乗	8乗	9乗
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	1	2	4	8	1	2
3	9	12	6	3	9	12	6	3
4	1	4	1	4	1	4	1	4
5	10	5	10	5	10	5	10	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	4	13	1	7	4	13	1	7
8	4	2	1	8	4	2	1	8
9	6	9	6	9	6	9	6	9

10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	1	11	1	11	1	11	1	11
12	9	3	6	12	9	3	6	12
13	4	7	1	13	4	7	1	13
14	1	14	1	14	1	14	1	14

復号鍵Dを求める際の不定方程式はp－1とq－1の公倍数を法にすればよいのだから，8でなく4でもよい。証明は前述の$\left(M^E\right)^D \equiv M \pmod{pq}$を示したものと同様にできる。n＝15の場合，p－1とq－1の最小公倍数は8でなく4であるから，E×D≡1 (mod 4) でよいことになる。

例題　mod 15の累乗表を利用して
暗号鍵3をとしたとき，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
あ	い	う	え	お	か	き	く	け	こ	さ	し	す	せ

平文　『すしくう』を暗号化せよ。
それを復号鍵3で復号化して確認せよ。

例題　55を法，暗号鍵3として，
55を法とするの累乗表では，何乗ごとの周期で全ての数が自分に戻るか，調べよ。また，復号鍵を求めよ。

解説　n＝5×11，
(p－1)(q－1)＝4×10＝40　である
E×D≡1 (mod 40) ならば

$$\left(M^E\right)^D \equiv M \pmod{55}$$

よって全ての数は41乗すると自分自身に戻る。
周期は(p－1)と(q－1)の最小公倍数だから20である。
3D≡1 (mod 20) を解く。
法を20として
20D≡0，
21D≡7よりD≡7

復号鍵は7

6　ElGamal暗号について

RSA暗号には初の公開鍵暗号の座はとられたが，5年遅れてElGamalが，離散対数問題の困難性に基づくElGamal暗号を考案した。
ここでは素数pを法とする世界のべき乗を考える。

原始根
pを素数とする。整数aのべき乗
$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ \cdots\cdots,\ a^{p-1}$
がpを法として全て異なるとき，aを原始根という

つまり原始根ではべき乗した結果と，べき乗数が1対1で対応している
例　p＝13とする。pを法として原始根2のべき乗をみると，下の表のようになる。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^x	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

例えば　$2^9 \equiv 5 \pmod{13}$　となっているが，ここで，9から5を求めるのは簡単だが，逆は困難である。これが離散対数問題である。9はmod 13の世界での$\log_2 5$というわけである。

離散対数問題
pを素数，aをZ_pの原始根とする。$y \equiv a^x \pmod{p}$を満たすxは，1, 2, 3, …, p-1の中にただひとつ存在する。p，a，yが与えられたとき，にxを求める問題を離散対数問題という。

離散対数問題の困難性がElGamal暗号の安全性の根拠となっている。

ElGamal暗号の作り方
1) $y \equiv a^x \pmod{p}$となる，p，a，x，yを選ぶ。ここでpは素数，xは$1 \leqq x \leqq p-1$なる整数である。
p，a，yは公開鍵，xは秘密鍵となる。
2) $1 \leqq r \leqq p-1$なる整数rを決める
3) 平文mに対し，
数の組$(c_1,\ c_2) = (a^r,\ y^r m)$を暗号として対応させる。

復号の方法
5) 暗号$(c_1,\ c_2) = (a^r,\ y^r m)$に対し，
$c_2 \times c_1^{-x}$が平文m

$c_2 \times c_1^{-x}$に　$(c_1,\ c_2) = (a^r,\ y^r m)$を代入すれば，$c_2 \times c_1^{-x} \equiv y^r m \times (a^r)^{-x}$

$\equiv (a^r)^{rm} \times (a^r)^{-x}$

$\equiv a^{rxm} \times a^{-rx}$

$\equiv m \pmod p$ となり

確かに暗号化，復号できている。

例　p＝13 とする。$7 \equiv 2^{11} \pmod{13}$ を利用してＥｌＧａｍａｌ暗号を作る。13，2，7は公開する。11は復号のための秘密鍵となる。法は13である。

r＝3 とすれば，平文5はmod13

5 → 暗号 $(2^3, 7^3 \times 5)$ と暗号化される

復号は，$(7^3 \times 5) \times (2^3)^{-11}$

$\equiv (2^{11})^3 \times 5 \times (2^3)^{-11}$

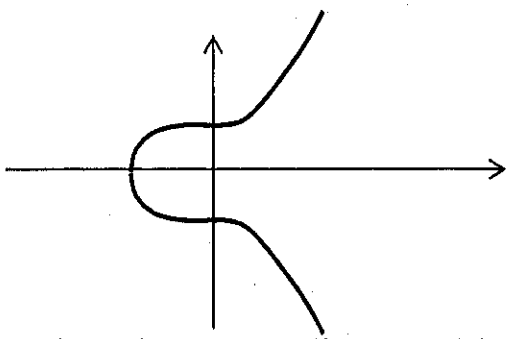
$\equiv 5 \pmod{13}$

つまり，$(2^{11})^3 = (2^3)^{11} = 2^{33}$ より，異なるルートで同じ数 33 を得ているわけだ。

7　最新トピック『楕円曲線暗号』

a，bを整数，$4a^3 + 27b^2 \neq 0$ とする。方程式

$E : y^2 = x^3 + ax + b$　で定義された曲線を楕円曲線という。これは下の図のようなWeierstrass型という曲線になる。



楕円曲線E上の点P，Qに対し，直線PQとEとの交点をRとおき，x軸に関するRの対称点をR'とおく。

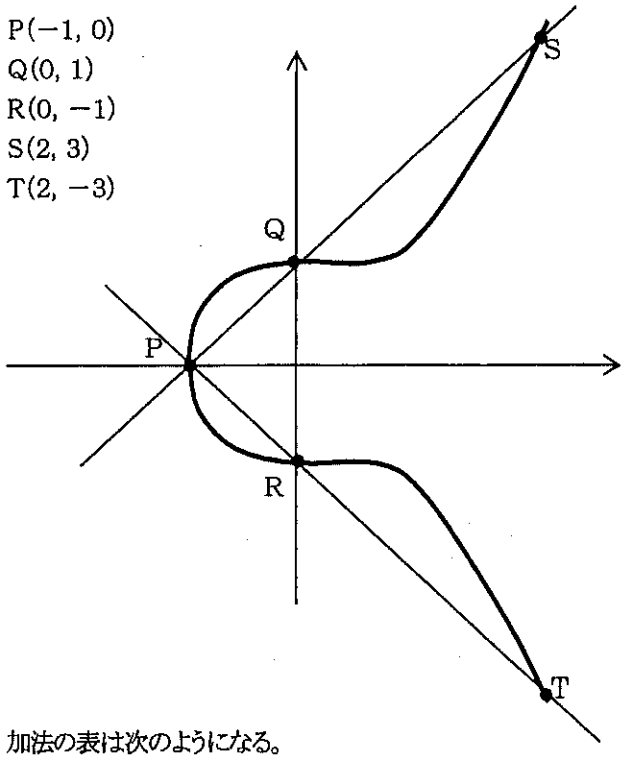
E上の点全体に無限遠点Oを付け加えた集合に，加法を次のように定義する。P＋Q＝R'

この加法は座標の加法ではない。無限遠点Oは，P＋O＝O＋P＝P　を満たす。

Eにおけるこの２項演算は閉じていて，交換法則・結合法則が成り立ち，単位元が存在し，逆元が存在する。つまり可換群になっている。

例　$E : y^2 = x^3 + 1$

P(−1, 0)
Q(0, 1)
R(0, −1)
S(2, 3)
T(2, −3)



加法の表は次のようになる。

＋	O	P	Q	R	S	T
O	O	P	Q	R	S	T
P	P	O	T	S	R	Q
Q	Q	T	R	O	P	S
R	R	S	O	Q	T	P
S	S	R	P	T	Q	O
T	T	Q	S	P	O	R

このような加法について，Pをn回足した点

nP＝P+P+P+…

を考える。

例題　この加法において　1≦n≦6(nは整数)としてnSを求めよ。

表より

1S＝S

2S＝S＋S＝Q

3S＝2S＋S＝Q＋S＝P

4S＝3S＋S＝P＋S＝R

5S＝4S＋S＝R＋S＝T
6S＝5S＋S＝T＋S＝O

nPとPが与えられたとき，nを求める問題を『楕円離散対数問題』という。この

nP＝Q

という式では，nとPからQを求めるのは簡単だが，PとQからnを求めるのは非常に難しい。これを利用して設計した暗号を楕円曲線暗号という。楕円離散対数問題は，素因数分解や通常の離散対数問題より難しいので，楕円曲線暗号はRSA暗号やElGamal暗号より安全である。

暗号の作り方は，ElGamal暗号の掛け算が足し算になっている。公開鍵をxPとし，平文mに対し，乱数rを決め，次のようにする。

暗号化:r(xP)＋m
復号化:{r(xP)＋m}－x(rP)

8 具体的な話題を授業に取り入れたい

2002年の特別講座『暗号』における受講者の感想に次のようなものがあった

- 日常の数学の授業では，数学の理論と実際の利点との関わりがわかりづらいという点もあり，実用と数学のあり方という点でよいものであったと思う。
- 数学が社会のシステムに関わることができるということがわかった。とても難しい内容だったけれど，面白かった。
- 暗号の仕組みがわかってよかったが，数学の話としては，楕円曲線の話をもっとして欲しかった。
- 普段勉強している整数問題にこんな用途があったとは知らなかった。この事実によりこれからの勉強にやりがいを感じました。

日常生活と数学の関わりという点では，算数以降，数学の内容が進むにつれて教材が抽象的になっていき，中高時代の数学というと，最も実生活から離れた存在というイメージがある。物理と連携した微分方程式やデータ処理に関する統計学などだけでなく，数学が実生活に活用されているのだという一例として，暗号理論は貴重な教材であろう。

現代暗号の概念である公開鍵暗号が不思議なのは，暗号化鍵を公開しても，復号は受信者にしかできないことだ。ＲＳＡ暗号，ＥｌＧａｍａｌ暗号，楕円曲線暗号はいずれも整数論の問題の難しさを利用して，暗号の安全を確保している。

暗号のしくみを授業で取り上げた場合，話を簡単にしたり演習問題をやったりするために，小さい数字や具体的な曲線で例題をしたいが，それでは現実になぜ安全なのかが実感できない。巨大な数の素因数分解の困難さを実感するには，資料や工夫が必要だろう。
ＲＳＡ暗号については，中高生に適当な代数の理論が含まれており，今後是非実際に教材として扱ってみたいと考えている。ＥｌＧａｍａｌ暗号，楕円曲線暗号については，暗号の安全のよりどころとなる理論そのものが難解なため，簡単な紹介に留まるのはやむをえないけれど，数千年前以来の古い話題の多い数学授業の中で，少しでも最新の話題にふれられたら素晴らしいことだ。

参考文献

- 『特別講座Ｉ』(2002)
  筑波大学附属駒場中高数学科
- 『暗号理論』伊藤正史 ナツメ社
- 『初等整数論入門』銀林浩 国土社
- HP『RSA暗号体験入門』
  http://www.cybersyndrome.net/rsa/index.html
- RSAの実体験ソフト RsaEXper
  (森の里CandY)
- HP『サルにもわかるRSA暗号』
  http://www.maitou.gr.jp/rsa/

3．5．2　加法定理から導き出される多項式

三角関数の加法定理を用いると自然数nに対して，$\cos n\theta$，$\sin n\theta$を$\cos\theta$や$\sin\theta$の多項式で表すことができる。

3.5.2.1 $\cos n\theta$の$\cos\theta$による多項式[1]

$\cos\theta = y$とおけば，

・$n=1$　$\cos\theta = y$

・$n=2$　$\cos 2\theta = 2y^2 - 1$

・$n=3$　$\cos 3\theta = 4y^3 - 3y$

・$n=4$　$\cos 4\theta = 8y^4 - 8y^2 + 1$

・$n=5$　$\cos 5\theta = 16y^5 - 20y^3 + 5y$

・$n=6$　$\cos 6\theta = 32y^6 - 48y^4 - 18y^2 - 1$

……

となる。計算が大変になるが，ここで，加法定理を次のように工夫して使うと簡単に求められる。

$$\cos(n+2)\theta = \cos\{(n+1)\theta + \theta\}$$
$$= \cos(n+1)\theta\cos\theta - \sin(n+1)\theta\sin\theta$$
$$\cos n\theta = \cos\{(n+1)\theta - \theta\}$$
$$= \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin(n+1)\theta\sin\theta$$

この２つの式を辺々加えると

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta$$

となる。ここで，左辺の$\cos n\theta$を右辺に移項して，

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta - \cos n\theta \quad (3.5.1)$$

とする。

これより，上で見てきたように，$\cos n\theta$を$\cos\theta$の多項式にするために，

$\cos n\theta = F_n(\cos\theta) = F_n(y)$とすれば，

(3.5.1)式は漸化式

$$F_{n+2}(y) = 2yF_{n+1}(y) - F_n(y) \qquad (3.5.2)$$

を得る。(3.5.2)と$F_1(y) = y$，$F_2(y) = 2y^2 - 1$から$F_3(y)$，$F_4(y)$，……の整式多項式を求めることができる。

$\sin n\theta$を$\sin\theta$を用いて表すことができるかどうか考察してみよう。

3.5.2.2 $\sin n\theta$の$\sin\theta$による多項式

$\sin\theta = y$とおけば

・$n=1$　$\sin\theta = y$

・$n=2$　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2y\cos\theta$

・$n=3$　$\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta = -4y^3 + 3y$

・$n=4$
$$\sin 4\theta = (-8\sin^3\theta + 4\sin\theta)\cos\theta$$
$$= (-8y^3 + 4y)\cos\theta$$

・$n=5$
$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$
$$= 16y^5 - 20y^3 + 5y$$

・$n=6$
$$\sin 6\theta = (32\sin^5\theta - 32\sin^3\theta + 6\sin\theta)\cos\theta$$
$$= (32y^5 - 32y^3 + 6y)\cos\theta$$

……

$\cos n\theta$の場合と異なり，nが偶数の場合は，$\sin n\theta$を$\sin\theta$の整式多項式で表すことができない。

3.5.2.3 nが奇数の場合

$n = 2k+1$とおけば

$\sin(2k+1)\theta$を$\sin\theta$で表すことは可能である。

ここでは，nが奇数の場合に，『和と差の公式』をあわせて考察する。

【例】　$\sin\theta$，$\sin 5\theta$について

$$\sin\theta = \sin(3\theta - 2\theta) = \sin 3\theta\cos 2\theta - \cos 3\theta\sin 2\theta$$

$$\sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta) = \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta\sin 2\theta$$

$$\sin\theta + \sin 5\theta = 2\sin 3\theta\cos 2\theta \quad \text{(和と差の公式)}$$

したがって，

$$\sin 5\theta = 2\sin 3\theta\cos 2\theta - \sin\theta$$
$$= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) - \sin\theta$$
$$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

---

[1] Tchebysheffの多項式

一般に,

$$\sin(2k-1)\theta = \sin\{(2k+1)\theta - 2\theta\}$$
$$= \sin(2k+1)\theta\cos 2\theta - \cos(2k+1)\theta\sin 2\theta$$
$$\sin(2k+3)\theta = \sin\{(2k+1)\theta + 2\theta\}$$
$$= \sin(2k+1)\theta\cos 2\theta + \cos(2k+1)\theta\sin 2\theta$$
$$\sin(2k-1)\theta + \sin(2k+3)\theta$$
$$= 2\sin(2k+1)\theta\cos 2\theta \quad \text{(和と差の公式)}$$

したがって,

$$\sin(2k+3)\theta$$
$$= 2\sin(2k+1)\theta\cos 2\theta - \sin(2k-1)\theta$$
$$= 2\sin(2k+1)\theta(1-2\sin^2\theta) - \sin(2k-1)\theta$$

ここで, $f_{2k+1}(y) = \sin(2k+1)\theta$ とおけば, 次の漸化式ができる。

$$f_{2k+3}(y) = 2f_{2k+1}(y)(1-2y^2) - f_{2k-1}(y) \quad \text{すなわち}$$

$$f_{2n+3}(y) = 2f_{2n+1}(y)(1-2y^2) - f_{2n-1}(y) \qquad (3.5.3)$$

ただし, $f_1(y) = y$, $f_3(y) = -4y^3 + 3y$

【例】 $\sin 5\theta$, $\sin 7\theta$, $\sin 9\theta$, $\sin 11\theta$ を, $\sin\theta = y$ とおき, y の多項式で表すと, それぞれ次のようになる。

$$16y^5 - 20y^3 + 5y$$

$$-64y^7 + 112y^5 - 56y^3 + 7y$$

$$256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 9y$$

$$-1024y^{11} + 2816y^9 - 2816y^7 + 1232y^5 - 220y^3 + 11y$$

1 次の項は, 簡単に覚えることができる。

3. 5. 2. 4 加法定理から出てくる多項式

$$\sin(p+q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q$$
$$\sin 2p = 2\sin p\cos p$$

である。

$s(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $c(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ とおくと

$$s(p+q) = s(p)c(q) + c(p)s(q) \qquad (3.5.4)$$

3. 5. 2. 5 多項式の係数の決定

$\sin n\theta = f(\sin\theta)$ とおき, 両辺を θ について微分すると

$$n\cos n\theta = \cos\theta f'(\sin\theta)$$

さらもう 1 回微分すると

$$-n^2\sin n\theta = -\sin\theta f'(\sin\theta) + \cos^2\theta f''(\sin\theta)$$

すなわち,

$$-n^2 f(\sin\theta) = f''(\sin\theta)(1-\sin^2\theta) - f'(\sin\theta)\sin\theta$$

が得られる。この式に,

$$\sin n\theta = f(\sin\theta) = \cdots\cdots + a\sin^{k+2}\theta + b\sin^k\theta + \cdots\cdots$$

として, k 次と $k+2$ 次の項を比較して

$$a(n^2 - k^2) + b(k+1)(k+2) = 0$$

を得る。したがって, 多項式の係数には次の式が成り立つ。

$$\frac{k^2 - n^2}{(k+1)(k+2)}a = b$$

$\sin n\theta$ の $(2k-1)$ 次の係数を ${}_nS_{2k-1}$ とすると

$${}_nS_{2k-1} : {}_nS_{2k+1} = a : b$$
$$= 1 : \frac{n^2 - (2k-1)^2}{2k(2k+1)}$$

すなわち,

$${}_nS_{2k+1} = \frac{n^2 - (2k-1)^2}{2k(2k+1)}\,{}_nS_{2k-1} \qquad (3.5.5)$$

が成り立つ。

【例】 $\sin 5\theta$ の y の 1 次の係数は 5

すなわち, ${}_5S_1 = 5$ であるから, (3.5.5)式より

$${}_5S_3 = \frac{5^2 - 1^2}{2\cdot 3}\,{}_5S_1 = 20, \quad {}_5S_5 = \frac{5^2 - 3^2}{4\cdot 5}\,{}_5S_3 = 16$$

よって,

$$\sin 5\theta = 16y^5 - 20y^3 + 5y$$
$$= 5y - 20y^3 + 16y^5$$

となり, 多項式の係数が決まる。

３．５．３　三角関数表を作る

特別講座ではフーリエ級数などが取り上げられたが、ここでは三角関数の導入段階の教材を紹介する。教科書巻末に掲載されている「三角比の表」は，特定の角以外の三角比の値や，三角比の基本的な性質によって表に記された角以外の三角比の値を求める利用がほとんどで，近似の程度に対する指導は十分ではない。そこで，「三角比の表」を近似の程度に焦点をあてて作成するものである。

(1) 三角比の値の精度を上げる

三角比の値の近似程度に主眼をおき，近似値として小数第４位までの値で記されている「三角比の表」の値と，工学的手法によって求められる数値を対比する。工学的手法を支援する計算には，表計算ソフト Excel の利用を前提とする。

① 面積と角の関係

三角関数の極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明で用いられることの多い図(図１参照)を用いて，三角形や扇形の面積と角の関係について見ていくことにする。

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，半径 r，中心角 θ の扇形 OAP をつくり，点Ａにおける円の接線が直線 OP と交わる点をＴとする。このとき，面積を比較すると，

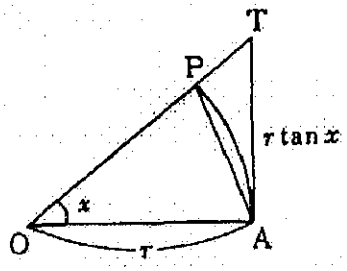


図１.

△OAP<(扇形 OAP)<△OAT となっている。

したがって，

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2\tan x$$

となり，

$$\sin x<x<\tan x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

となる。(Ⅰ)の不等式のうち

$$\sin x<x$$

の部分に注目してみる。この不等式は，sinx の値が角の大きさ x により抑えられることを示している。

次に，(Ⅰ)の式のうち

$$x<\tan x$$

の部分に注目してみる。

$0<x<\frac{\pi}{2}$ より，(右辺は，$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ となる。

$x<\tan x$ を sinx について解くと，次のようになる。

$$x<\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$\sin x>x\sqrt{1-\sin^2 x}$$

両辺を平方すると

$$\sin^2 x>x^2(1-\sin^2 x)$$

$$(1+x^2)\sin^2 x>x^2$$

$$\therefore\quad \sin^2 x>\frac{x^2}{1+x^2}$$

因数分解して

$$\left(\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sin x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)>0$$

ここで，$\sin x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ より，

$$\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

したがって，

$$\sin x>\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

(Ⅰ)と(Ⅱ)を合わせると，

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\sin x<x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

となる。(*)の不等式によって，sinx の値について，角の大きさによる近似が可能となる。

実際，sin1° の値を計算してみる。

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}(\mathrm{rad})$$

なので，$\pi\approx 3.14159265358979_{[14]}$ として[1]計算すると，

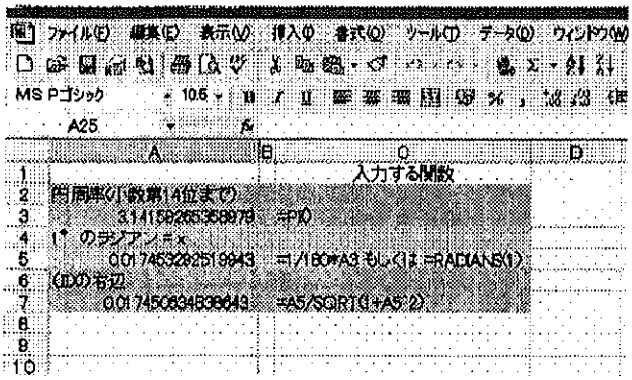
$$1^\circ=x=0.017453292519943_{[15]}$$

となる。

つまり，

$0.017450634838643_{[15]} < \sin 1° < 0.017453292519943_{[15]}$

これから，$\sin 1° = 0.01745\cdots\cdots$となり，この数値は，教科書巻末に載っている「三角比の表」の近似値よりも精度が上がっている。



	A	B	C	D
1			入力する関数	
2	円周率(小数第14位まで)			
3	3.14159265358979	=PI()		
4	1° のラジアン＝x			
5	0.017453292519943	=1/180*A3 もしくは =RADIANS(1)		
6	(Ⅰ)の右辺			
7	0.017450634838643	=A5/SQRT(1+A5^2)		
8				
9				
10				

図2.

② 2倍角の公式の利用(その1)

三角関数の加法定理を用いて証明されることの多い2倍角の公式を用いて，①の近似結果よりも正確な三角比の値を目指す。

①より，$\sin 1°$ の値は

$0.017450634838643_{[15]} < \sin 1° < 0.017453292519943_{[15]}$

の範囲にあることが分かった。ここで，1° の半分となる角の大きさ 0.5° を考えてみる。

$$0.5° = \frac{\pi}{360}(\text{rad})$$

なので，①と同じく，$\pi \approx 3.141592653589793_{[14]}$ として計算すると，

$$0.5° = x = 0.008726646259972_{[15]}$$

となる。

$$0.008726313992891_{[15]} < \sin 0.5° < 0.008726646259972_{[15]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(Ⅲ)}$$

また，$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから，

$$0.999961924997196_{[15]} < \cos 0.5° < 0.999961922097563_{[15]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(Ⅳ)}$$

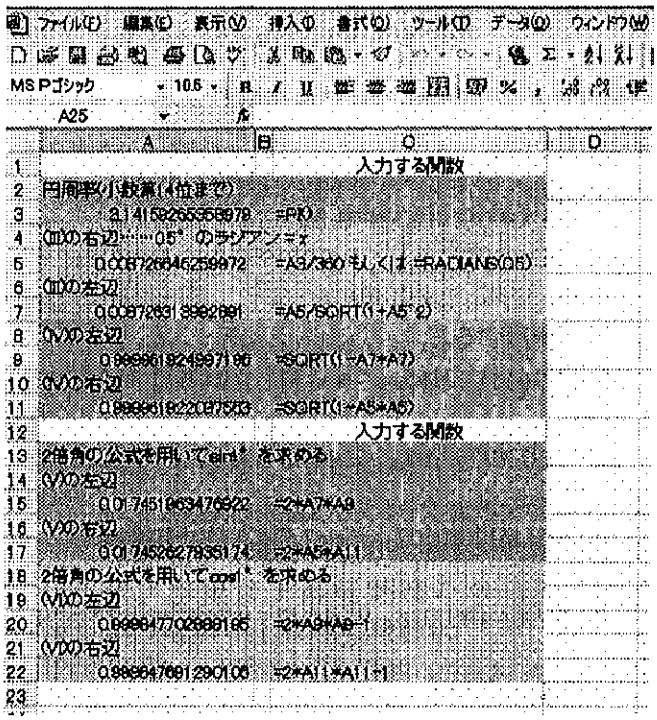
となる。次に，2倍角の公式

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

を用いて，(Ⅲ)と(Ⅳ)の辺々をかけ合わせると

$$0.017451963476922_{[15]} < \sin 1° < 0.017452627935174_{[15]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(Ⅴ)}$$

となる。



	A	B	C	D
1			入力する関数	
2	円周率(小数第14位まで)			
3	3.14159265358979	=PI()		
4	(Ⅲ)の右辺……0.5° のラジアン＝x			
5	0.008726646259972	=A3/360*もしくは=RADIANS(0.5)		
6	(Ⅲ)の左辺			
7	0.008726313992891	=A5/SQRT(1+A5^2)		
8	(Ⅳ)の左辺			
9	0.999961924997196	=SQRT(1-A7*A7)		
10	(Ⅳ)の右辺			
11	0.999961922097563	=SQRT(1+A5*A5)		
12			入力する関数	
13	2倍角の公式を用いて sin1° を求める			
14	(Ⅴ)の左辺			
15	0.017451963476922	=2*A7*A9		
16	(Ⅴ)の右辺			
17	0.017452627935174	=2*A5*A11		
18	2倍角の公式を用いて cos1° を求める			
19	(Ⅵ)の左辺			
20	0.999847702888195	=2*A9^A9-1		
21	(Ⅵ)の右辺			
22	0.999847691290106	=2*A11*A11+1		
23				

図3.

これは，①で得られた $\sin 1°$ の数値の範囲よりもさらに狭くなっており，近似の精度が上がっていることが分かる。

また，余弦 cos についての近似も，2倍角の公式

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

を用いると，(Ⅳ)の辺々の結果について

$$0.999847702888195_{[15]} < \cos 1° < 0.999847691290106_{[15]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(Ⅵ)}$$

となる。$\cos 1° = 0.999847\cdots\cdots$となり，小数第6位まで精度が上がった近似と言える。

③ 2倍角の公式の利用(その2)

①と②より，(＊)の不等式と2倍角の公式を用いることで，「三角比の表」に記されている近似値よりも，精度の上がった数値を導き出すことができた。今度は，30° を事例として，①と②による近似方法の精度について確認してみることにする。

30° を順次半分の角度として計算していき，1° よりも小さくなるところまで計算する。

つまり，

30°，15°，7.5°，3.75°，1.875°，0.9375°

の各々の三角比の値(ここでは sin に限定する)について計算をおこなうことになる。はじめに，1° よりも小さくな

った角 0.9375° について正弦 sin の値を求めてみる。

すると,

$$0.9375° = 0.9375 \times \frac{\pi}{180}\ (\mathrm{rad})$$

なので, ①と同じく, $\pi \approx 3.14159265358979_{[14]}$ として計算すると,

$$0.9375° = x = 0.016362461737447_{[15]}$$

となる。(*)式に代入すると,

$0.016362461737447_{[15]} < \sin 0.9375° < 0.016360271814967_{[15]}$

となる。以降, この不等式について, ②と同様, 2倍角の公式を適用すると,

$0.032716164371165_{[15]} < \sin 1.875° < 0.032720542457239_{[15]}$ ……(VII)

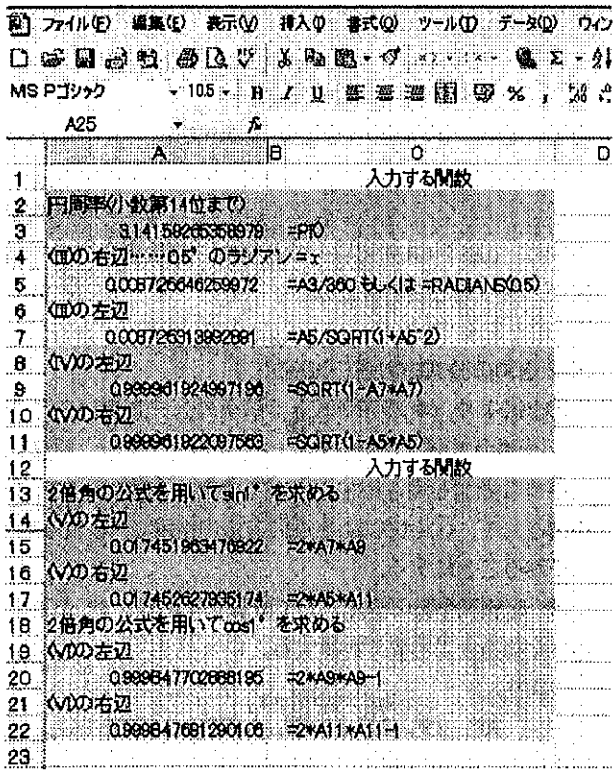
$0.065397301705208_{[15]} < \sin 3.75° < 0.065406043810979_{[15]}$ ……(VIII)

$0.130514612080107_{[15]} < \sin 7.5° < 0.130531983911224_{[15]}$ ……(IX)

$0.258796480897316_{[15]} < \sin 15° < 0.258830330324107_{[15]}$ ……(X)

$0.499959538555073_{[15]} < \sin 30° < 0.500020236000917_{[15]}$ ……(XI)

となっている。このように, 小数第 4 位までの近似値として正しい値が得られていることが確認できる。



	A	B	C	D
1			入力する関数	
2	円周率(小数第14位まで)			
3	3.14159265358979		=PI()	
4	(III)の右辺……0.5°のラジアン=x			
5	0.008726646259972		=A3/360 もしくは =RADIANS(0.5)	
6	(III)の左辺			
7	0.008726313992981		=A5/SQRT(1+A5^2)	
8	(IV)の左辺			
9	0.999961924997196		=SQRT(1-A7*A7)	
10	(IV)の右辺			
11	0.999961922097583		=SQRT(1-A5*A5)	
12			入力する関数	
13	2倍角の公式を用いてsin1° を求める			
14	(V)の左辺			
15	0.017451963476822		=2*A7*A9	
16	(V)の右辺			
17	0.017452279351741		=2*A5*A11	
18	2倍角の公式を用いてcos1° を求める			
19	(VI)の左辺			
20	0.999847702868195		=2*A9*A9-1	
21	(VI)の右辺			
22	0.999847681290106		=2*A11*A11-1	
23				

図 4.

(2)「三角比の表」を用いた教材案

「三角比の表」を題材とする, 近似に対する捉え方の議論を通じて, 微小な変化の概念の獲得を目指す指導案を提示する。

① 第 1 時 : 面積と角の関係から近似方法を探る

問　題
「三角比の表」には, 0°～90°までの三角比の値が小数第4位まで記されている。この数値は近似値であるが, より正確な値を求めるためにはどうすればよいか。

指導のねらい

より正確な三角比の値を求めるために, 図形の面積と角の大きさに関する方法を求める。

	時間	内　容	留意事項
導入	5分	数学Ⅰの内容「図形と計量」の中の「三角比」と, 数学Ⅱの内容「三角関数」で学習した公式等の確認をおこなう	
展開	35分	問題を提示する ＊ 表1の「特定の角」は, 三角形の辺の比より導かれる値 ＊ 「より正確な値」の欄を埋めるよう指示する 問題解決に必要なことがらを話し合う より正確な近似値を求める方法の一例を示す ＊ どのようなアイデアが隠されているか, 話し合う	表1を提示 図1を提示 Excel による演示もしくは結果の提示
まとめ	10分	次の時間では, 表計算ソフト Excel を用いて計算をおこなうことを前提として, アイデアを練っておく	

近似方法を模索する際, $\sin x < x$ の関係式はもとより, より良い近似のためには, $\sin x$ を下からも抑え込むようにする要がある。つまり,

$$\square < \sin x < x$$

となるように, □に当てはまるような角の大きさ x の関係式を導く工夫が必要である。このようなアイデアが, 次時の微小な変化の概念の獲得へと通じる。

	正弦 (sin)		
角	特定の角	より正確な値	三角比の表
0°	0		0.0000
1°			0.0175
2°			0.0349
3°			0.0523
29°			0.4848
30°	$\frac{1}{2}$		0.5000
31°			0.5150
44°			0.6947
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0.7071
46°			0.7193
59°			0.8572
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		0.8660
61°			0.8746
89°			0.9998
90°	1		1.0000

表 1.　空欄の「三角比の表」

② 第 2 時：近似方法を用いた計算

指導のねらい

前時で求めた(＊)の不等式による近似方法を用いて，より正確な三角比の近似値を実際に求めてみる。

	時間	内　　容	留意事項
導入	5分	前時の学習の復習	
展開	35分	前時の近似方法の計算をおこなう より正確な近似値を求める方法の一例を示す ＊ 前時で練ったアイデアを，実際に Excel で実行してみる	Excel による確認 オンラインであれば，インターネット・サイトの利用も可とする
まとめ	10分	Excel で作成したデータを提出もしくは添付ファイルで送信する	アイデアについても記述

予め Excel に備わっている三角関数に関連する関数を用いると，容易に「三角比の表」を作成できる。そのため，本時では，前時での(＊)の不等式による近似を確認するだけではなく，(＊)の不等式よりもより精度の上がった近似を目指す指導を心がけたい。

【注釈】

1) 円周率 π の数値を小数第 14 位までの値として計算する理由は，表計算ソフト Excel では 15 桁までの表示しかできないためである。

【補遺】

「三角比の表」を作成する取り組みは，平成 17 年度サイエンス・パートナーシップ・プログラム(SPP)として，前橋女子高等学校にて実施されました。本年 7 月 9 日と 7 月 23 日に，「こんなところに数学が」というテーマで，筑波大学にて渡邊公夫(筑波大学大学院数理物質科学研究科／AC)教授が授業実践されました。授業の内容の紹介については，前橋女子高等学校のホームページ(http://www.maejo-hs.gsn.ed.jp)を参照。

⑵の指導案は、本校 56 期生(高校 1 年生)に実施した授業を、修正・再構成したものです。

【参考文献】

1. 西本敦雄 (2005)「三角比の表を超える～近似値ではなく真の値の表を目指して～」『数研通信』2005 年 1 月号，pp.14-17，数研出版。
2. 時岡郁夫「三角比の表(15 桁／特殊な角)」，『URL：http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/math/math_index.html』2005 年 2 月 6 日更新時を参照。

4　次年度に向けて

以上に報告した指導事項・指導例、及び教材例は、いずれも検討途中の試案であり、今後、本校以外の方からの意見も広く集めるとともに、実践を重ねるなどして、さらに充実させていきたいと考えている。