

# 回転せん断試験による 砂礫粒子の破碎特性評価

佐藤 完<sup>1</sup>・北島 弘子<sup>2,3</sup>・高橋 美紀<sup>3</sup>・松島 亘志<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 筑波大学 システム情報工学研究科(〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

E-mail:s1620892@u.tsukuba.ac.jp

<sup>2</sup>Texas A&M University, College of Geosciences (College Station, TX 77843-3115)

<sup>3</sup>産業技術総合研究所 活断層・地震研究センター(〒305-8561 茨城県つくば市東 1-1-1)

<sup>4</sup>正会員 筑波大学教授 システム情報系(〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

砂礫粒子の破碎特性を評価するために、粒子形状の角張った山砂と丸い川砂の二種類の試料を用い、回転数、回転速度、拘束圧を変化させて回転せん断試験を実施した。また、試験前後の試料の粒度分析を行った。その結果、どの条件でも十分にせん断が進行すれば、間隙比とせん断応力比、試料の粒度分析から得られるフラクタル次元は、同様の定常状態に達すること、粒子破碎およびそれに伴う体積圧縮は、回転の比較的初期の段階でより顕著に進行すること、回転速度の変化は今回の実験条件の範囲( $0.21 \leq \gamma \leq 210(1/s)$ )ではせん断応力、間隙比の変化に顕著な影響を及ぼさないことなどがわかった。その上で、二試料の単粒子破碎実験結果を基に、回転せん断試験の結果を系統的に評価できるマイクロメカニクスモデルの構築を行い、せん断に伴う体積圧縮は、間隙率とせん断ひずみが両対数で直線的な関係があること、圧縮が顕著に始まるせん断ひずみは、与える拘束圧と単粒子破碎強度の比によって表現されること示した。

**Key Words:** rotary shear test, grain crushing, grain size distribution

## 1. 序論

砂粒子のような脆性的な破壊を生じる粒子の集合体が高い圧縮力やせん断力を受ける場合、内部の堆積構造や応力鎖構造に起因する局所的に応力集中によって、粒子の破碎が生じる。粒子が破碎すると応力鎖構造が急激に消失・再構成され、堆積構造が変化するだけでなく、粒子形状や粒度分布などの粒子物性が変化するため、密度特性や弾性係数などのバルクの力学物性自体も変化する。このように粒子破碎は極めて複雑な力学現象をもたらすが、もともと地質材料は、そのような破碎プロセスを経て地盤を形成しており、この現象の理解と力学評価は、土木工学のみならず、農学や地球惑星科学でも最重要課題の一つであると言える<sup>1,2</sup>。その中でも、高速で極めて大きなせん断を受ける場合の粒子破碎特性の評価は、斜面崩壊や地震断層の滑り特性評価と関連して重要である<sup>3,4</sup>。本研究では、そのような载荷が可能である回転せん断試験機<sup>5</sup>を用いて、バルクの応答と粒子破碎の関係を検討する。

粒子破碎についての既往の研究としては、単粒子破碎実験<sup>6,7</sup>によって粒子破碎現象が Weibull 分布でモデル化できること<sup>7,10</sup>、また一次元圧縮試験により、いわゆる  $e\text{-log}(p)$  バイリニアモデル(ここに  $e$  は間隙比、 $p$  は载荷応力)よりも  $\log(e)\text{-log}(p)$  バイリニアモデルあるいは  $\log(n)\text{-log}(p)$  バイリニアモデル(ここに  $n$  は間隙率)の方が実験結果によく一致すること<sup>11</sup>などが示されている。一方、様々な条件で粒子を破碎させた場合の粒度分布がフラクタル分布(あるいはべき乗分布)になることは、古くから多くの研究事例<sup>12-14</sup>があり、その際のべきの値について様々な解釈がなされている。

これらの先行研究を踏まえて、本研究では、粒子形状の角張った山砂(岐阜珪砂)と丸い川砂(鹿島珪砂)の二種類の試料を用い、まずは単粒子破碎試験を行って、単一の粒子破碎特性を把握した。その上で、回転数、回転速度、拘束圧を変化させて回転せん断試験を実施し、得られた力学応答を、単粒子の破碎特性から記述するマイクロメカニクスモデルの構築を行った。

## 2. 粒子物性評価および単粒子破碎実験

### (1) 用いる試料

本研究では、二種類の砂礫材料を用いて試験を実施した。それぞれ、岐阜県の山中で採取された岐阜珪砂3号(以下、山砂、図中では Mountain sand)と、茨城県鹿嶋市の川沿いで採取された鹿島珪砂3号A(以下、川砂、図中では River sand)である。それぞれの物性値を表-1に、写真を図-1、図-2に示す。山砂の粒子は表面に凹凸のあるいびつな形状をしており、一方川砂は角の取れた丸みを帯びた粒子であることがわかる。

### (2) 粒度分布と粒子形状

本研究では、試験前の試料を、産業技術総合研究所が所有する画像解析装置 Camsizer を用いて粒度分析した。Camsizer では、試料を少しずつ落下させ、2台の異なる拡大率のカメラによる同時測定システムにより、試料の粒子形状や粒径(長径、短径、面積円相当径など)を2次元投影画像解析で測定することが出来る。本研究では、面積円相当径を用いる。測定可能な粒径は、 $30\mu\text{m}$ ～ $30\text{mm}$ となっている。図-3に試験前の二つの試料の粒度分析結果を示す。それぞれの平均粒径  $D_{50}$  と均等係数  $U_c$  は、山砂では  $D_{50}=2.10\text{mm}$ 、 $U_c=1.50$ 、川砂では  $D_{50}=2.54\text{mm}$ 、 $U_c=1.44$  であった。また、粒子形状を定量的に評価するため、吉村・小川<sup>15)</sup>によって提案された凹凸係数FU(以下、FU)を導入した。FUは、粒子内に直行する三軸を考え、その長軸と中間軸を含む平面に粒子を投影した断面から、次式で定義される。

$$FU = \frac{4\pi a}{l^2} \quad (1)$$

ここに、 $a$ は投影断面の面積、 $l$ は外周長を表す。FUは真円度とも呼ばれ、0～1.0の値をとる。粒子が完全な円するときFUの値は1.0となり、凹凸の度合いが大きくなるほど小さくなる。ただし、今回の山砂と川砂のFUをCamsizerで測定する際には、落下中の投影粒子断面を用いて算出された値となっている。結果を図-4に示す。これより、山砂のほうが川砂よりFUが低く、凹凸度合いが大きい試料であることが定量的にわかる。

### (3) 破碎応力と Weibull 分布

粒子単体の強度を定量的に評価するため、単粒子破碎試験を実施した。単粒子破碎試験では、図-5に示すように、ステンレス製の棒で試料1粒を挟み込み、プラスチックのカバーで覆う。試料が破碎するまで垂直方向に载荷し、その時の荷重と変位を測定した。载荷速度は $0.015\text{mm/s}$ とし、準静的な载荷とみなせるようにした。測定された値から、粒子の破碎応力 $\sigma_c$ ( $\text{N/mm}^2$ )を式(2)によって算出した<sup>7)</sup>。

表-1 試料の物性値

試料	平均粒径 (mm)	密度 ( $\text{g/cm}^3$ )	主な構成要素
岐阜3号 (山砂)	2.10	2.59	96.25% $\text{SiO}_2$ , 2.05% $\text{Al}_2\text{O}_3$
鹿島3A (川砂)	2.54	2.64	90.20% $\text{SiO}_2$ , 5.58% $\text{Al}_2\text{O}_3$

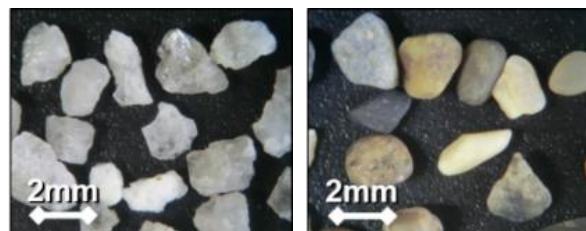


図-1 岐阜3号(山砂)

図-2 鹿島3A(川砂)

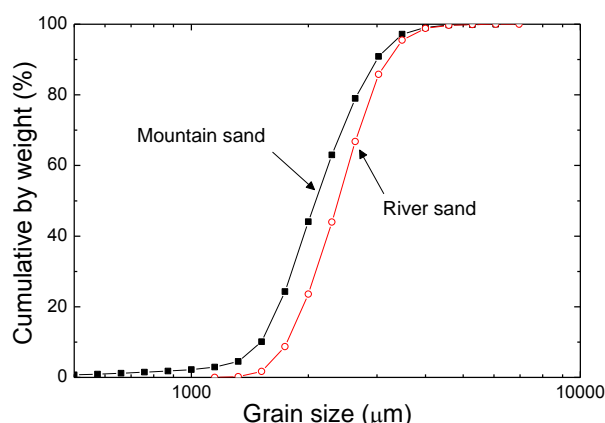


図-3 試料の粒度分布

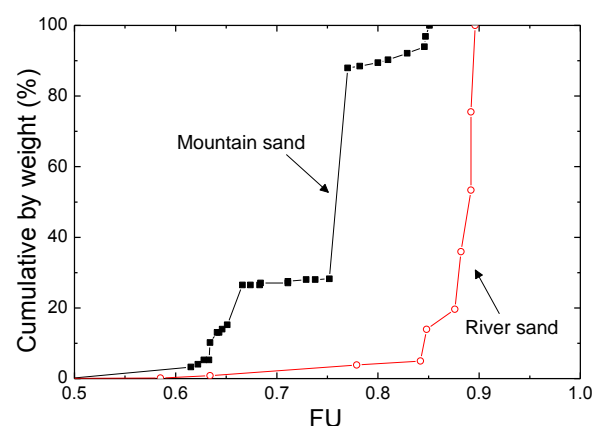


図-4 試料のFU

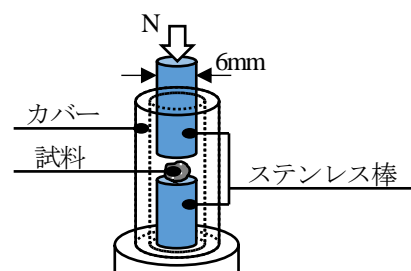


図-5 単粒子破碎試験概要

$$\sigma_c = \frac{N_{max}}{d^2} \quad (2)$$

ここに、 $N_{max}$ は試験における最大荷重(N)、 $d$ は粒子の高さ(mm)を表す。実験結果の一部を図-6に示す。山砂よりも川砂の方が大きな破砕応力を示した。これは、二つの砂礫材料の生成環境に起因するものであると考えられる。すなわち、川砂は、川を流れる過程で何度も他の粒子との衝突にさらされ、強度の高い粒子のみが破砕せずに残り、更に表面の凹凸も少ないため単粒子破砕試験時の応力集中が少なく、山砂よりも高い破砕応力を示したと考えられる。

序論で述べたように、砂粒子の破砕応力の分布は、Weibull 分布に従うことが既往の研究<sup>7-10</sup>から知られているが、それは次式のように表現できる。

$$P_s = \exp \left[ - \left( \frac{d}{d_0} \right)^\eta \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (3)$$

ここに、 $P_s$ は粒子の生存確率(粒子が割れない確率)、 $d$ は対象とする粒子の粒径、 $d_0$ は基準とする粒径、 $\sigma_0$ は平均破砕応力、 $m$ は Weibull 分布係数である。また、 $\eta$ は通常の Weibull 分布では体積に比例するため3となるが、ここではパラメータの一つとしている。山砂と川砂の試験結果と Weibull 分布の式との比較を図-7に示す。その結果、山砂においては  $m=2$ 、 $\sigma_0=20(\text{MPa})$ 、川砂においては  $m=2$ 、 $\sigma_0=60(\text{MPa})$ とすると、実験結果をある程度表現できることがわかる。なお、試験で用いた粒子のサイズのばらつきは小さいため、ここでは  $d/d_0 = 1$ としている。

### 3. 回転せん断試験

#### (1) 試験方法

本研究では、産業技術総合研究所の所有する、高速・高圧の载荷が可能な回転せん断装置<sup>5)</sup>を用いて試験を行った。図-8のように2gまたは5gの乾燥状態の供試体を、花崗岩で製作された2つのシリンダー(直径25mmの Small cylinder または 39mmの Large cylinder)で挟み込み、テフロンリングで覆う。供試体を作成する際は、さじを用いて落下距離がゼロになるようにして堆積させた。供試体の初期高さは、試験装置の制約から3.0~3.5mm程度であり、破砕前の粒子1.2個分しかないので、初期間隙比は0.9~1.1程度にばらつく。しかし、载荷後に破砕が進行して平均粒径が小さくなると、ばらつきは小さくなると考えられる。

垂直方向に一定の荷重を加えながら上部のシリンダーのみを回転させることで、供試体にせん断力を加える。本研究では、回転数100rot、回転速度0.75rpm(せん断速度では約0.21(1/s))、垂直方向の拘束圧 $\sigma_n = 1.0\text{MPa}$ を

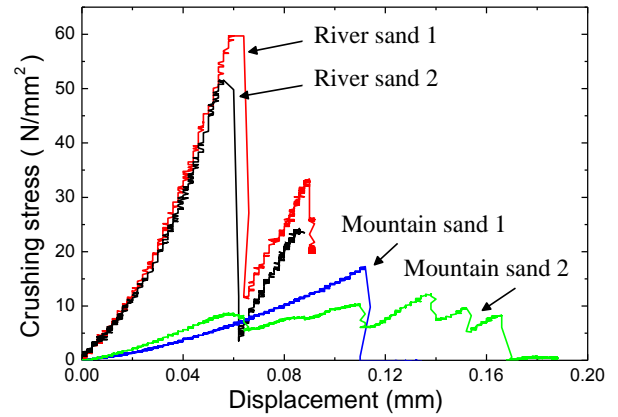


図-6 単粒子破砕試験結果の例

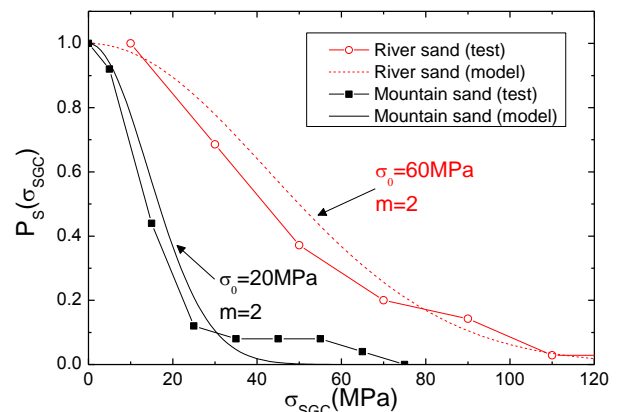


図-7 試験結果と Weibull 分布によるフィッティング

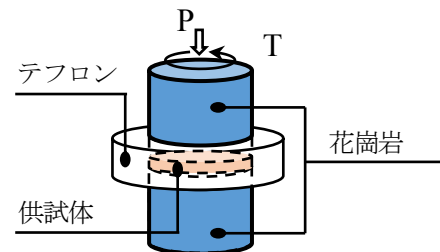


図-8 回転せん断試験概要

表-2 試験条件

条件	値
回転数	1~100 rot
回転速度	0.48~750 rpm
拘束圧	0.15~1.0MPa

基準とした。表-2のように条件を変化させて試験を実施し、その時の垂直方向荷重、垂直方向変位、回転速度、トルクを測定・記録した。用いるシリンダーはやすりで表面に凹凸をつけ、供試体とシリンダーの境界面でのすべりが起きにくいように工夫した。また、用いるシリンダーの大きさは試験条件によって使い分けた。

本研究の回転せん断試験では、供試体の半径方向および高さ方向のせん断ひずみの非一様性が問題となる。実

際に、試験後の試料を観察すると、高さ方向には明確な粒度の違いは見られなかったが、半径方向には違いがみられ、中心付近は外周付近に比べて破碎の進行が遅いことが確認できた。したがって、測定されたトルクと回転速度から、どの位置におけるせん断力とせん断ひずみを算出するのか問題になる。そこで Kitajima ら<sup>4)</sup>は、粒子間の摩擦力がする仕事量に着目し、中心から 2/3 の半径の位置において算出されたせん断力およびせん断ひずみが代表値としてふさわしいものであることを示している。本研究でもそれを採用しているが、本研究の試験結果は、上述の非一様性を平均化した値となっている。

## (2) 結果と考察

図-9 に、山砂と川砂それぞれ基準の条件で試験した結果を示す。せん断応力には二種類の試料の間に顕著な違いはなかった。これは、図-7 において単粒子破碎強度が山砂と川砂で異なっている結果に整合しないようにみえる。一方、図-10 では、同じ試験における間隙比の変化を示しているが、回転初期に間隙比の減少率が大きく、その傾向は単粒子破碎強度が小さい山砂の方が顕著であることがわかる。図-9 で違いが出なかった原因については明らかではないが、可能性としては、単粒子破碎強度は粒子形状に大きく依存しており、破碎が進行す

ると粒子の形が変わるため、二種類の試料の違いが顕著でなくなること、あるいは、試料内の応力鎖構造の違いなどにより、単粒子破碎強度はせん断時の粒子破碎率には影響するものの、平均的なせん断抵抗への影響は少ないことなどが考えられる。

ここで、山砂で回転速度を変化させたときの間隙比の様子を図-11 に示す。回転速度を 1000 倍変化させても、せん断ひずみの増加に伴う間隙比減少の傾向は大きく変化しなかった。これらのケースでは、せん断応力比についても速度の違いに対応した違いは見られなかった。

次に、山砂で拘束圧を変化させた試験の間隙比の様子を図-12 に示す。このケースでは 1MPa 未満の低拘束圧条件を実現するため、花崗岩のシリンダーを直径 39mm のもの(Large cylinder)に変更し、試料の質量を 5g に増やした。拘束圧を小さくしていくと、せん断ひずみの増加に伴う間隙比の減少率が小さくなっている。これは拘束圧が低いと粒子破碎が生じるような大きな応力が局所的に作用する確率が減少することが原因であると考えられる。また、この結果では曲線が波打っているようにみえるが、これはシリンダーを大きくしたことで上下のシリンダーの面同士が厳密に平行になっていないことによる影響がより顕著になったことが原因であると考えられる。

さらに、川砂で回転数を変化させた試験における間隙

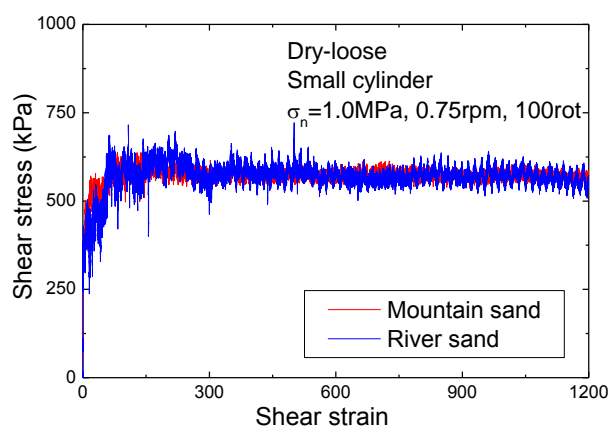


図-9 せん断応力-せん断ひずみ曲線

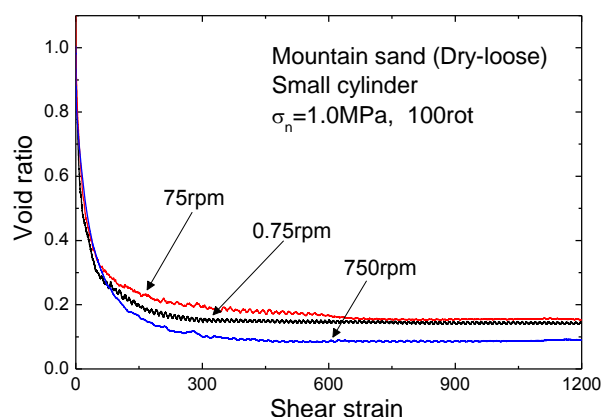


図-11 回転速度の比較

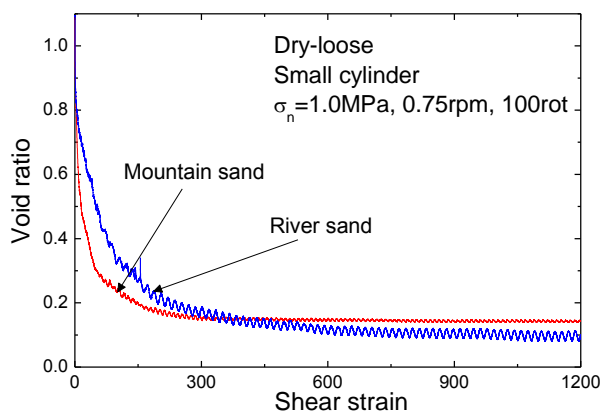


図-10 間隙比-せん断ひずみ曲線

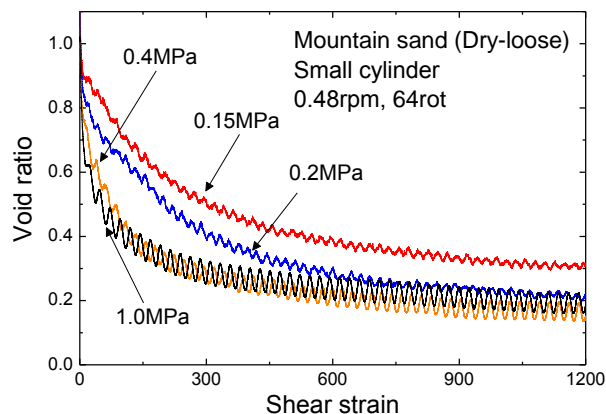


図-12 拘束圧の比較

比の変化を図-13 に示す。回転初期での間隙比の減少率が特に大きいことがわかる。回転数以外は同じ条件の試験なので曲線は重なるはずであるが、相違がみられる。これは供試体の個体差によるもので、主に初期間隙比が異なっている事に起因すると考えられる。

### (3) 粒度分析とフラクタル次元

画像解析装置 Camsizer に加え、レーザー式粒度測定器 LA-960 を用いて、試験後の試料の粒度分析を実施した。LA-960 では、同じ回折・散乱パターンを表す球の直径として、球相当径が得られる。仕様では測定範囲は  $0.01\mu\text{m}\sim 5\text{mm}$  となっているが、 $1\text{mm}$  以上の粒径については装置に損傷を与える可能性があるため、本研究では測定対象としていない。試験後の試料の粒径幅は数  $\mu\text{m}$ ~数  $\text{mm}$  と広範囲にわたるため、粗い粒子を Camsizer で、細かい粒子を LA-960 でそれぞれ測定し、結果をつなぎ合わせた。粒度分析は手法によって結果が異なる場合があるので、それらの結果をつなぎ合わせるのには注意が必要であるが、今回の Camsizer と LA-960 による二つの結果をつなぎ合わせるものの整合性は確認済みである。

山砂で回転速度を変化させたときの粒度分析結果を図-14 に示す。試験前の試料と比較すると、粒径の小さい粒子が増えており、粒子破碎が進行していることが確認できる。また、回転速度が大きい試料ほど粒度の変化が大きい。この原因については、回転速度が大きい試験の方が、せん断中の供試体の内部構造の変化よりも粒子破碎が早く進行するためであるということが、可能性として考えられる。

山砂で拘束圧を変化させたときの粒度分析結果を図-15 に示す。基準としている  $1.0\text{MPa}$  よりも拘束圧を小さくした試料では、細かい粒子が相対的に多くなる傾向がみられる。この原因については現時点では明確にわかっていないが、ひとつの可能性として、垂直応力が低いと粒子表面の摩耗によって、細粒分が増えるというメカニズムが考えられる。一方で、拘束圧が高いケースで微小粒子が固着し団粒化したものを、粒度分析のときに十分に分離できていない可能性もあり、今後の検討が必要である。

川砂で拘束圧と回転速度は同じで、与える回転数のみを変化させた試験試料の粒度分析結果を図-16 に示す。

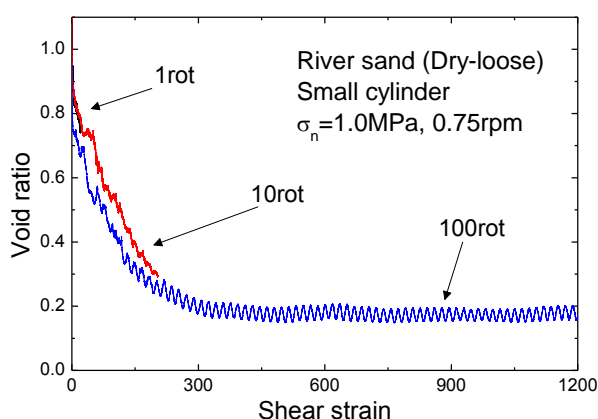


図-13 回転数の比較

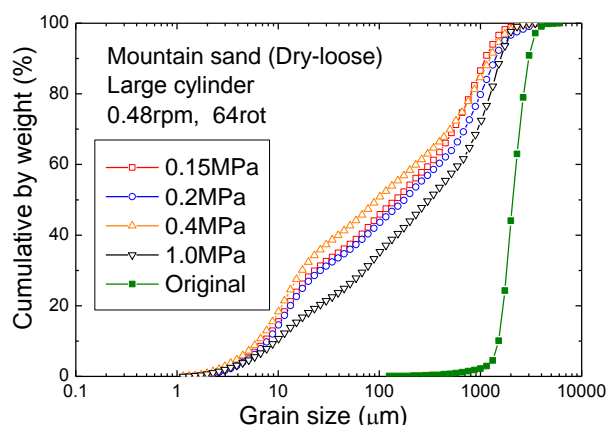


図-15 拘束圧の比較 (粒度分布)

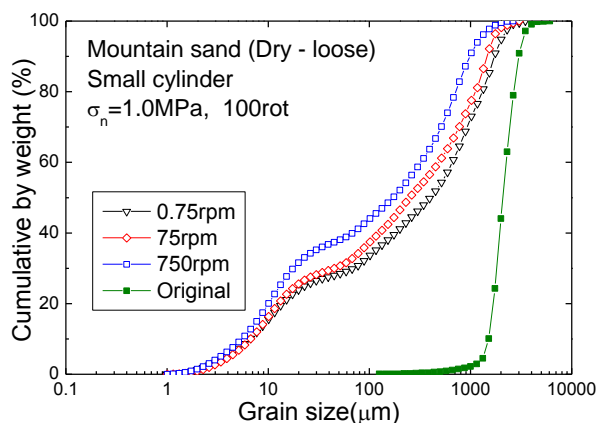


図-14 回転速度の比較 (粒度分布)

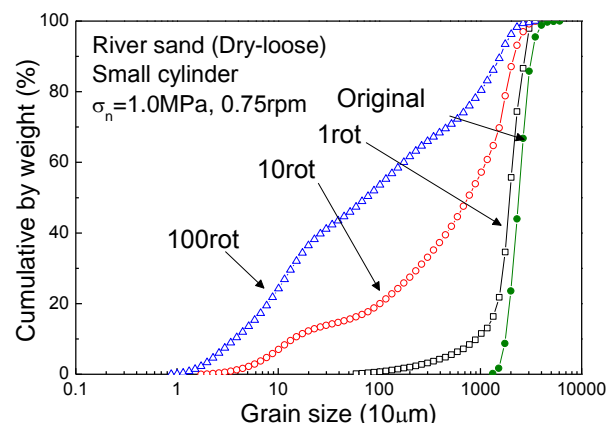


図-16 回転数の比較 (粒度分布)



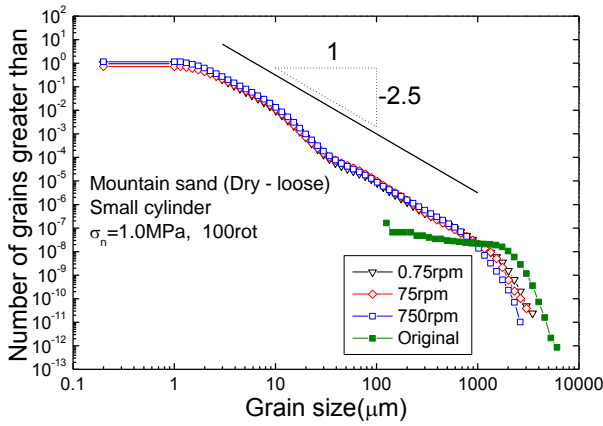


図-17 回転速度の比較（フラクタル次元）

この結果から、せん断が進むにつれてどのように粒度分布が変化していくかがわかる。特に、せん断初期の方が粒度の変化が大きく、活発に破碎が進行していることがわかる。

ここで、山砂で回転速度を変化させたときの粒度分布において累積個数を取り、両対数グラフで表したものを図-17 に示す。粒状体がフラクタル構造を有している場合（観測するスケールを変えても同じ構造がみられる場合）、このグラフは直線となり、その傾きの絶対値はフラクタル次元を示すことで知られている<sup>12-14)</sup>。グラフ上の3ケースとも、フラクタル次元はおおよそ2.5を示した。これは、アポロニウスの球充填（Apollonian sphere packing）のフラクタル次元<sup>16)</sup>である約2.47と類似しており、試験後の供試体の充填構造がそれと似たような構造、即ち、大きな粒子の隙間に小さな粒子が入り込み、その隙間にさらに小さな粒子が入り込んでいる構造になっていることを示唆する結果である。

#### 4. 粒子破碎のマイクロメカニクスモデル

##### (1) 間隙充填モデル

本節では、前節で示した回転せん断試験を、2節での単粒子破碎特性から評価するマイクロメカニクスモデルの構築を試みる。具体的には、間隙比 $e$ を任意のせん断ひずみ $\gamma$ の関数として表すことを目指す。まず、試験前の供試体を単分散系の粒子で構成されていると仮定すると、供試体の初期間隙比 $e_0$ は次のように表される。

$$e_0 = \frac{V_{void}}{V_{solid}} \quad (4)$$

ここに、 $V_{void}$ は供試体中の間隙の体積、 $V_{solid}$ は供試体中の粒子の体積である。さらに、図-18のように、この供試体中の間隙が、粒子破碎によって生じた小さな粒子によって、 $e_0$ と等しい間隙比で充填されるとする。ただし、ここで生じる小さな粒子もまた、単分散系である。

なお、大きな粒子の破碎が十分に進行するまでこれらの小さな粒子は破碎しないと仮定する。すると、次の式(5)が成立する。

$$e_0 = \frac{V_{void} - V_{solid}^S}{V_{solid}^S} \quad (5)$$

ここに、 $V_{solid}^S$ は粒子破碎によって生じた小さな粒子の体積である。ここで、大きな粒子と小さな粒子の個数比に着目する。それぞれの体積は定義してあるので、粒径を定義すれば、個数を求めることが出来る。すると、式(5)と合わせて、次の式(6)が成り立つ。

$$\frac{N_S}{N_L} = \frac{V_{solid}^S}{V_{solid}} \left( \frac{d_L}{d_S} \right)^3 = \frac{e_0}{1 + e_0} \alpha^{-3} \quad (6)$$

ここに、 $N_S$ は小さな粒子の個数、 $N_L$ は大きな粒子の個数、 $d_S$ は小さな粒子の直径、 $d_L$ は大きな粒子の直径、 $\alpha \equiv (d_S/d_L)$ であり、大小の粒子の直径の比を表す。

いま、この $\alpha$ の値を決めるために破碎された粒子のフラクタル性に着目したい。式(6)で両辺に対数をとると、

$$\log N_S - \log N_L = \log \left( \frac{e_0}{1 + e_0} \right) - 3(\log d_S - \log d_L) \quad (7)$$

が得られる。ここで、粒度分布におけるフラクタル次元 $D_f$ の定義を確認しておこう。図-16からもわかるように、フラクタル次元は $\log$ スケールにおける粒径幅に対する粒子個数幅の比であるから、次の式(8)のように表現することもできる。

$$D_f \equiv - \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log d_2 - \log d_1} \quad (8)$$

ここに、 $N_1, N_2$ は曲線上の任意の点における粒子の個数、 $d_1, d_2$ はそれらの点に対応した粒径である。この式(8)と式(7)を比べることにより、次の式(9)が得られる。

$$D_f \equiv \frac{\log N_S - \log N_L}{\log d_S - \log d_L} = 3 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left( \frac{e_0}{1 + e_0} \right) \quad (9)$$

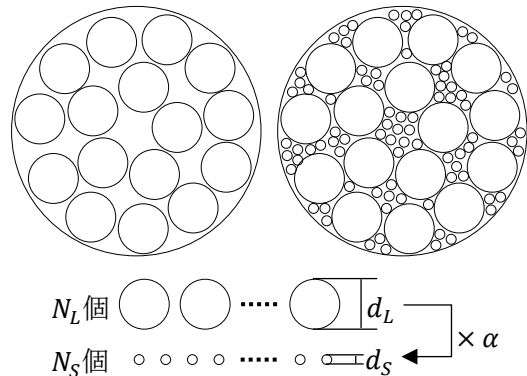


図-18 間隙充填モデルのイメージ図

この式(9)から、フラクタル次元 $D_f$ と初期間隙比 $e_0$ がわかっているならば、 $\alpha$ を決めることができる。図-19 に式(9)をグラフ化し、初期間隙比ごとのフラクタル次元と $\alpha$ の関係を示す。本研究の回転せん断試験における初期間隙比はおよそ1.0であり、図-17からわかるように試験後の試料のフラクタル次元は約2.5である。グラフから読み取ると、 $\alpha$ の値はおよそ0.2が適切であることがわかる。

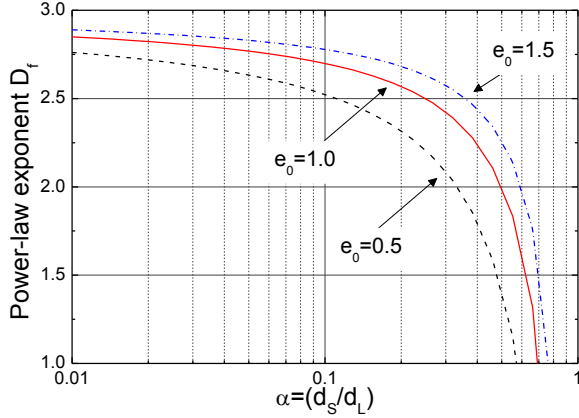


図-19 フラクタル次元と $\alpha$ の関係

次に、粒子破碎が進行し、さらに小さな粒子を充填していく場合を考える。式(4)と式(5)から、充填が完了した後の供試体の全体の間隙比 $e_1$ は次式であらわされる。

$$e_1 = \frac{e_0}{\frac{e_0 + 1}{e_0} + 1} \quad (10)$$

このように、供試体内部では粒子破碎がおこり、小さな粒子が大きな粒子の間隙に充填されていくプロセスが繰り返されるとする。この間隙充填プロセスが $k$ 回繰り返されたときの間隙比 $e_k$ は、漸化式を解くことにより次のように表される。

$$1 + \frac{1}{e_k} = \left(1 + \frac{1}{e_0}\right)^{k+1} \text{ or } n_k = n_0^{k+1} \quad (11)$$

ここに、 $n_k$ は間隙充填プロセスを $k$ 回繰り返した後の供試体の間隙率、 $n_0$ は初期間隙率である。間隙比よりも間隙率を用いた方が式が簡潔になる。

さて、ここで間隙充填プロセス中の粒子の個数に着目する。式(3)より、砂礫材料の破碎確率は Weibull 分布に従うので、 $k$ 番目のプロセスにおける大きな粒子の個数は $N_k$ と、小さな粒子の個数 $N_{k+1}$ は、それぞれ次のように表される。

$$N_k = N_{k,0} \cdot (P_S)_k^i \quad (12)$$

$$N_{k+1} = \left(1 - (P_S)_k^i\right) \frac{N_{k,0}}{\alpha^3} \quad (13)$$

ここに、 $N_{k,0}$ は $k$ 番目のプロセスにおける初期の粒子（粒径： $d_k$ ）の個数、 $i$ はせん断中に粒子を

破碎させようとする試行の回数である。式(6)を $k$ 番目のプロセスについて考えると、次式が得られる。

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = \frac{e_0}{1 + e_0} \alpha^{-3} \quad (14)$$

式(3)と式(12)-(14)より、 $i$ について整理すると、次式を得る。

$$i = \frac{\ln\left(\frac{1+e_0}{1+2e_0}\right)}{\ln(P_S)_k} = \frac{\ln\left(\frac{1+e_0}{1+2e_0}\right)}{-\alpha^{\eta k} \beta^m} \quad (15)$$

ここに、 $\beta \equiv \sigma_p / \sigma_0$ であり、 $\sigma_p$ は粒子がせん断中に受ける応力、 $\sigma_0$ は平均破碎応力である。もし、試験中の垂直応力とせん断応力の比 $\tau / \sigma_n$ が一定であると仮定すれば、 $\sigma_p$ 即ち $\beta$ も一定であるとみなすことが出来る。また、 $i$ が1増えるために必要なせん断ひずみ量を $\hat{\gamma}_k$ と置く。 $k$ が1増えるのに必要なせん断ひずみ量は $\hat{\gamma}_k \cdot i$ で表される。式(15)より、 $i$ は $k$ の関数として表されており、 $k$ が増えるにつれて、 $k$ が1増えるために必要なせん断ひずみ量は増加していく。 $k$ がせん断の進行を表す量とみなせるので、この関係を $k$ が連続量だと仮定して書くと、次の式(16)となる。

$$\frac{d\gamma}{dk} = \frac{\ln\left(\frac{1+e_0}{1+2e_0}\right)}{-\alpha^{\eta k} \beta^m} \hat{\gamma}_k \quad (16)$$

このように、離散量を連続量に置き換えるモデル化は、ランダムウォークモデルから拡散方程式を導く際にも使われる<sup>17)</sup>。この微分方程式を解くと、次式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta^m} \cdot \frac{\log\left(\frac{1+e_0}{1+2e_0}\right)}{\log\left(\frac{n_0}{\alpha^\eta}\right)} \left[\left(\frac{n_0}{\alpha^\eta}\right)^k - 1\right] \\ &\equiv \Gamma \left[\left(\frac{n_0}{\alpha^\eta}\right)^k - 1\right] \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $\hat{\gamma}_0$ は初回の間隙充填プロセスにおいて $i$ が1増えるために必要なせん断ひずみ量である。

式(11)と式(17)を整理すると、次のように間隙率 $n$ とせん断ひずみ量 $\gamma$ の関係を示すモデル式が得られる。

$$\frac{\log n}{\log n_0} = \frac{\log(\gamma/\Gamma + 1)}{\log n_0 - \eta \log \alpha} + 1 \quad (18)$$

式(18)はせん断ひずみ量が十分に大きくなると、間隙率とせん断ひずみ量が両対数軸上で比例関係になることを示している。式(18)において、 $\Gamma$ と $\eta$ の値を決定する必要があるが、 $\Gamma$ は、 $\log n - \log \gamma$ とのグラフで、勾配が急に大きくなるせん断ひずみに相当し、 $\eta$ はその後の勾配に対応する。 $\eta$ の考え方についての概念図を図-20に示す。まず、 $\eta$ については $\eta = 2$ とすると、実験での間隙率の減少率を適切に表現できる。前述の通り、通常の Weibull 分布では $\eta = 3$ であるが、これは、粒子内に微小亀裂が均等に分布し、その一つが破壊すると粒子全体が

破壊する，という考え方に基づいている（図-20 の(c)に相当）．しかしながら，2点载荷による粒子破碎においては，破碎荷重を破碎断面で除して破碎応力を求める式(2)からもわかるように，粒子内のすべての微小亀裂ではなく，破碎が生じる断面内のみの微小亀裂が影響を及ぼす（図-20 の(b)に相当）．このことを考慮すると， $\eta = 2$ で実験結果を説明できることは妥当であると考えられる．

次に， $\Gamma$ の値を決定するために，いくつか $\Gamma$ の値を代入した式(18)と，山砂で回転速度を変化させた実験を比較する（図-21）．すると， $\Gamma = 5$ とするととき，急激に圧縮が生じ始めるせん断ひずみが実験とおおよそ一致することがわかる．

このようにして求めた $\Gamma$ と $\eta$ を基準として，山砂で拘束圧を変化させたときの結果を表現する場合は， $\Gamma$ 内の， $\beta \equiv \sigma_p / \sigma_0$ の $\sigma_p$ が変化することになる．式(17)より，拘束圧の影響は $\beta$ の分子の $m$ 乗に影響するので，これを考慮して $\Gamma$ の値を変更してモデル曲線を描き，実験結果と比較したものが図-22 である．実験の結果と完全には一致しないが， $\sigma_n$ が高くなるほど同じせん断ひずみでの $e$ が小さくなるという実験結果を表現できていることがわかる．

次に，川砂のせん断試験のモデル化について考える．図-21 で用いられている $\Gamma$ の値から $\hat{\gamma}_0$ を逆算すると， $\hat{\gamma}_0 \approx 7.79 \times 10^{-2}$ が得られる．本研究の回転せん断において，山砂でも川砂でもこの $\hat{\gamma}_0$ の値は等しいと仮定すると，今度は $\beta \equiv \sigma_p / \sigma_0$ の $\sigma_0$ (平均単粒子破碎応力)が，山砂と川砂で異なることを考慮して $\Gamma$ を算出することができ， $\Gamma = 45$ という値を得られる．この $\Gamma$ の値を代入した式(18)と，川砂で回転速度を変化させた実験を比較した結果を図-23 に示す．圧縮が生じはじめるせん断ひずみに関してはおおよそ一致しており，モデルの有効性を示している．ただし，間隙率の減少比の勾配は，山砂と異なり， $\eta = 1$ のときに，実験と一致する結果となった．この物理的意味合いは不明であり，今後の課題である．

また，実験結果では，いずれの場合も間隙率が0.1に近づくと， $\log n - \log \gamma$ の勾配が0になり，それ以上せん断ひずみを加えても間隙率が変化しない定常状態に到達する．これは，微小粒子の割合が増加し，それらの間に作用する粒子間付着力(具体的にはファンデルワールス引力や静電気力)が卓越すること，また微小粒子が結晶粒径サイズに近づき，いわゆる Hall-Petch 効果によって破碎強度が上昇したことにより，それ以上粒子破碎が発生しなくなっていることが原因であると考えられる．この効果は本モデルでは考慮していないため，モデル曲線は定常状態を表現できない．これについても，今後の課題としたい．

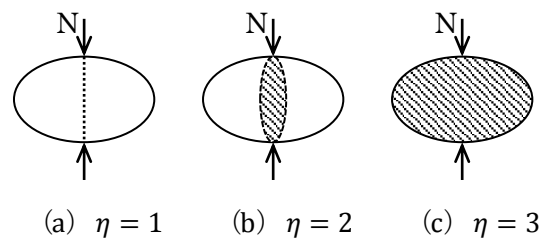


図-20  $\eta$ の考え方についての概念図

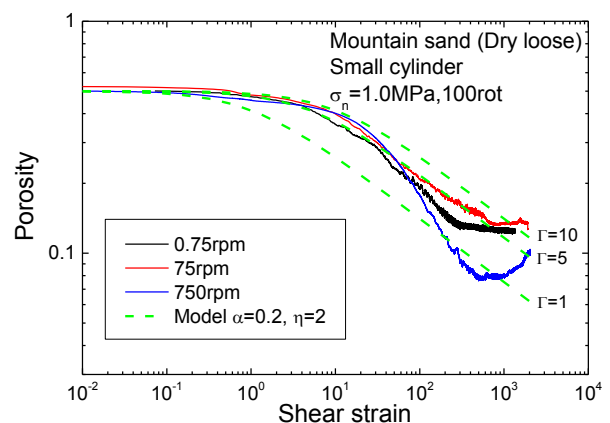


図-21 モデル式との比較（山砂：回転速度）

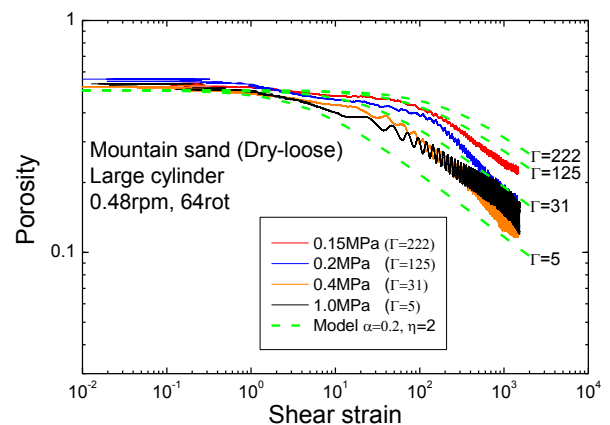


図-22 モデル式との比較（山砂：拘束圧）

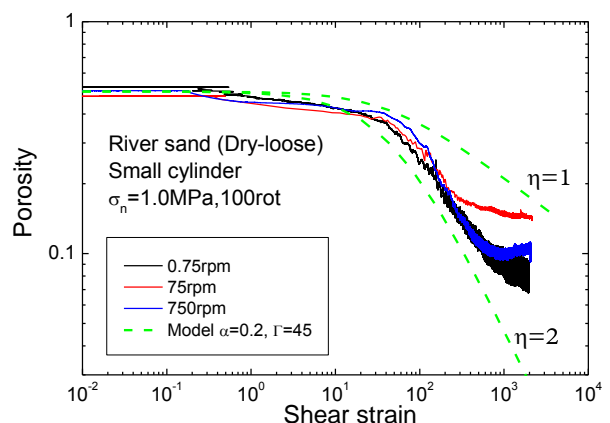


図-23 モデル式との比較（川砂：回転速度）



## 5. 結論

本研究では、2種類の砂礫材料を用い、ひずみ速度や拘束圧を変化させて回転せん断破碎試験を実施し、また破碎前後の粒度分布を計測して、これらを統一的に説明できるマイクロメカニクスモデルの構築を行った。得られた知見は以下の通りである。

- (1) 一定の拘束圧のもとで、極めて大きなせん断を加えつづけると、いずれの試験結果においても、せん断応力比、間隙比、粒度分布は一定の値に収束する。特に粒度分布は2.5のべきを持つフラクタル(べき乗)分布となる。
- (2) 粒子破碎およびそれに伴う体積圧縮は、せん断実験開始直後において著しく進行し、その後は緩やかに体積減少していく。この傾向は、本研究で提案したマイクロメカニクスモデルに基づけば、 $\log n - \log \gamma$  (ここに  $n$  は間隙率、 $\gamma$  はせん断ひずみ) として直線関係にあることが示され、実験結果もそれに調和的であった。また、 $\log n - \log \gamma$  グラフにおいて顕著な圧縮が始まるせん断ひずみは、与える拘束圧 $\sigma_p$ と平均単粒子破碎強度 $\sigma_0$ の比 $\beta = \sigma_p / \sigma_0$ に対して、 $(1/\beta^m)$ に比例する。ここに $m$ は単粒子破碎強度を表すWeibull分布におけるWeibull指数である。
- (3) せん断速度は、本研究で対象とした範囲( $0.21 \leq \gamma \leq 210(1/s)$ )においては、せん断応力比、間隙比の変化に顕著な影響を与えない。

## 参考文献

- 1) Melosh, H. J. (2011): Planetary surface processes (Vol. 13). Cambridge University Press.
- 2) Gudmundsson, A. (2011). Rock fractures in geological processes. Cambridge University Press.
- 3) Lockner, D., Byerlee, J. D., Kuksenko, V., Ponomarev, A., & Sidorin, A. (1991). Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite. *Nature*, 350(6313), 39-42.
- 4) Kitajima, H., Chester, J. S., Chester, F. M., & Shimamoto, T. (2010). High - speed friction of disaggregated ultracataclasite in rotary shear: Characterization of frictional heating, mechanical behavior, and microstructure evolution. *Journal of Geophysical Research*.
- 5) Togo, T., Shimamoto, T. (2012). Energy partition for grain crushing in quartz gouge during subseismic to seismic fault motion: an experimental study. *Journal of Structural Geology*, 38, 139-155.
- 6) Billam, J. (1971). Some aspects of the behaviour of granular materials at high pressures. *Proceedings of the Roscoe memorial symposium, Cambridge*, 69-80.
- 7) Nakata, A. F. L., Hyde, M., Hyodo, H., & Murata. (1999). A probabilistic approach to sand particle crushing in the triaxial test. *Geotechnique*, 49(5), 567-583.
- 8) McDowell, G. R., and M. D. Bolton. (1998). On the micro-mechanics of crushable aggregates. *Geotechnique*, 48.5, 667-679.
- 9) Zhang, Y. D., Buscarnera, G., & Einav, I. (2015). Grain size dependence of yielding in granular soils interpreted using fracture mechanics, breakage mechanics and Weibull statistics. *Géotechnique*, 66(2), 149-160.
- 10) Stefanou, I., & Sulem, J. (2016). Existence of a threshold for brittle grains crushing strength: two-versus three-parameter Weibull distribution fitting. *Granular Matter*, 18(2), 1-10.
- 11) Pestana, J. M., & Whittle, A. J. (1995). Compression model for cohesionless soils. *Géotechnique*, 45(4), 611-632.
- 12) Turcotte, D. L. (1986). Fractals and fragmentation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 91(B2), 1921-1926.
- 13) Steacy, S. J., & Sammis, C. G. (1991). An automaton for fractal patterns of fragmentation. *Nature*, 353(6341), 250.
- 14) Tsuchiyama, A., Uesugi, M., Matsushima, T., Michikami, T., Kadono, T., Nakamura, T., Uesugi, K., Nakano, T., Sandford, S.A., Noguchi, R., Matsumoto, T., Matsuno, J., Nagano, T., Imai, Y., Takeuchi, A., Suzuki, Y., Ogami, T., Katagiri, J., Ebihara, M., Ireland, T.R., Kitajima, F., Nagao, K., Naraoka, H., Noguchi, T., Okazaki, R., Yurimoto, H., Zolensky, M.E., Mukai, T., Abe, M., Yada, T., Fujimura, A., Yoshikawa, M., Kawaguchi, J. (2011). Three-Dimensional Structure of Hayabusa Samples: Origin and Evolution of Itokawa Regolith, *Science*, 333(6046), 1125-1128 (DOI: 10.1126/science.1207807).
- 15) 吉村優治, & 小川正二. (1993). 砂のような粒状体の粒子形状の簡易な定量化法. *土木学会論文集*, (463), 95-103.
- 16) Borkovec, M., De Paris, W., Peikert, R. (1994). The Fractal Dimension of the Apollonian Sphere Packing, *Fractals*, 2(4), 521-526.
- 17) 戸田盛和 (1996). 分子運動 30 講 朝倉書店

(2017. 6. 23 受付)

## EVOLUTION OF GRAIN CRUSHING DURING ROTARY SHEAR TEST

Kan SATO, Hiroko KITAJIMA, Miki TAKAHASHI and Takashi MATSUSHIMA,

To investigate the evolution of grain crushing during extremely large shear under constant confining pressure, a series of rotary shear tests was performed for two types of sands with various confining pressure, shear strain rate and total shear strain. Grain size distribution after the test was also measured for each sample. It turned out that (1) all the specimens reached an identical critical state with the same shear stress ratio, void ratio and grain size distribution described by a fractal (or power-law) distribution after a sufficiently large shear strain application, (2) the plastic compression occurred rapidly in the early stage of the test, and (3) the shear rate (from 0.21 to 210 (1/s)) did not affect the overall behavior. Based on such observation, a micromechanical model that connects the single grain crushing behavior with the bulk shear behavior was proposed. The model successfully described that a decrease in porosity with shear strain is a straight line in log - log plot, and that the threshold strain from where the plastic compression dominates is related to the ratio of confining pressure to the single grain crushing strength.