投稿論文

数学的モデリング能力の特定方法に関する研究
―― 原場面への注目と課題分析マップの援用 ――

松　嵜　昭　雄※

A Study of the Methods for Chasing Mathematical Modelling: Focus on Situations based on Individual Experiences & Using Task Analysis Mapping

Akio MATSUZAKI

数学的モデリングの評価は，今後予想される数学的モデリングの研究動向の１つである。筆者は，数学的モデリングの評価対象として数学的モデリング能力に注目している。研究目的は，数学的モデリング能力を特定していく方法を提案することである。その特定方法は，原場面を視点として課題分析マップを援用したものである。数学的モデリング能力を「数学的モデリングの各過程を遂行するのに必要な能力」と定義し，問題の変容を前提とする能力枠組みについて変数の取り扱いを示した。さらに，「解決者が自身の経験にもとづき想起する場面」である原場面に注目し，各過程に焦点をあてる。

問題の変容にともなう変数の変化と変数間の関係を視覚化できる課題分析マップを援用し，数学専攻の大学院生を被験者とする調査を実施した。原場面も変数の項目として取り扱い，マップ上に記した。現実世界に関係する原場面を手がかりとして，既述の能力の幾つかを確認することができた。また，数学に関係する原場面を手がかりとすることで，既述の能力とは異なる能力について補記することができた。

１．はじめに

OECD（経済協力開発機構）による国際学習到達度調査（略称 PISA 調査）における数学的枠組みは３つの領域から構成されており，その１つである「プロセス (Process)」領域は，最も重要なこととして，「問題が生み出される現実の世界を数学に結び付け，これによって問題を解決するために活発に働かせなければならない能力」（国立教育政策研究所, 2004, p. 22）とされる。この「プロセス」を

※筑波大学附属駒場中・高等学校

もとに特徴的な能力（The competencies）が同定されており，数学的モデリングの評価への重要な示唆となっている（2(2)も参照)。

数学的モデリングの評価は，2000年に東京／幕張で開催されたICME9（第9回数学教育世界会議）のTSG9「数学的モデリングおよび数学と他教科との関わり(Mathematical Modelling and Links between Mathematics and Other Subjects)」においても，今後予想される数学的モデリングの研究動向の1つに挙げられていた[1]。筆者は，評価対象として，問題解決の過程全般に関わる数学的モデリング能力に注目している。そこで，本稿では，数学的モデリング能力を特定していく方法を提案することを目的とした。その特定方法は，原場面を視点として課題分析マップを援用したものであり，その方法を数学的モデリングの実際に適用し，一連の数学的モデリング能力の追跡も試みる。

2．数学的モデリング能力

本稿で用いる用語「数学的モデリング」と「数学的モデリング能力」を定義し，数学的モデリング能力の規範的枠組みについて説明する。

(1) 数学的モデリング能力の定義

数学的モデリングの図式には理想的な解決過程の進行が示されている。本研究では，数学的モデリングを「現実世界における問題の解決を1つの目標として，問題から何かしらのモデルをつくり，その問題を数学的な問題へと翻訳し，数学的手法を用いてその問題の解答を導き，得られた解答を手がかりとして，もとの問題の解決を試みる，一連の活動を指す。その際，問題解決者は，より良い解決を目指して何度も繰り返し検討を重ね，導き出した解答に納得のいくまでモデルの修正や改善をおこなう活動」と定義する。さらに，Blum (1985) の図式を参照し，解決過程の中で生成される各モデルに対して，6つの過程（「αモデル化」「β数学化」「γ数学的作業」「δ_1現実場面への解釈」「δ_2現実モデルへの解釈」「ζ応用」）を特徴づけている図式を，数学的モデリングの図式として規定する（図1)。本稿では，図1を参照し，数学的モデリング能力を「数学的モデリングの各過程を遂行するのに必要な能力」(松嵜, 2002, p. 56）と定義する。

(2) 数学的モデリング能力の枠組み

数学的モデリングの各過程の進行に対して，問題の変容（清水, 1987）を前提として変数の取り扱いを議論した，数学的モデリング能力の枠組みを以下に示す

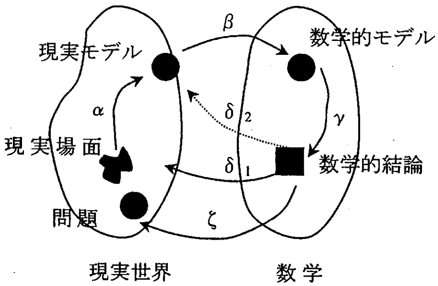

図１．数学的モデリングの図式

(表１)。この枠組みの縦軸には，図１に示した数学的モデリングの図式の各過程を配置している。横軸には，問題の分類を配置している。数学的モデリングの指導では，その指導目標に応じて，指導者により提示される問題が異なることから，問題を構成する変数の程度によって４系統に分類した。例えば，「Ⅰ：変数が表示されていない問題」としては，「運動会の全員リレーに勝ちたい。どうしたらいいか？」(大澤, 1996, p. 19) といった「リレー問題」，変数が表示されている問題のうち「Ⅲ：変数が特定されている場合」としては *"The product of the age of Ann and Mike is 300. Find their ages if Ann is 20 years older than Mike."* (SMP, 1991, p. 23) といった「Ann と Mike の年齢問題」が挙げられる。

表１は，数学的モデリングの各過程の進行に必要な変数の取り扱いを示したもので，成功的な問題解決を想定して記述したものである。そのため，数学的モデリング能力の規範的枠組みと言えよう。このような解決に必要な手続きを示しているものは，例えば，オーストラリア・ビクトリア州のカリキュラムに準拠した教科書などに見られるし (松嵜, 2002)，また，評価枠組みとして採用している研究もある (IKEDA & Stephens, 1998)。

１．で触れた PISA 調査における数学的枠組みの理論的根拠として「数学化サイクル」が示されている。数学化に携わることができるためには，総合的な数学的能力が必要であるとして８つの能力が挙がっており，その中の１つに「モデル化 (Modelling)」能力がある。

4. モデル化 (Modelling)：これには，①モデル化される場や状況を構造化すること，②「現実」を数学的構造へと変換すること，③「現実」という観点から数学的

表１．数学的モデリングの各過程の進行に必要な変数の取り扱い
(松嵜, 2001, p. 38)

問題の分類 ＼ 数学的モデリング過程	Ⅰ：変数が表示されていない問題	変数が表示されている問題 Ⅱ：変数が特定されていない場合	Ⅲ：変数が特定されている場合	Ⅳ：数学的記号表現された変数が示されている場合
α モデル化	変数の抽出，選択，設定をおこなう	変数の再抽出，再選択，再設定，そして再確認をおこなう	変数の設定を確認する	
β 数学化		変数の（抽出），選択，設定をおこない，数学へ翻訳する	変数を数学へ翻訳する	「現実モデル」に対する変数の妥当性を確認する
γ 数学的作業				数学的体系に則った，的確な処理をおこなう
δ_1 現実場面の解釈	抽出，選択，設定した変数の妥当性を確認する			変数によって「現実場面」の妥当性を確認する
δ_2 現実モデルの解釈		抽出，選択，設定した変数の妥当性を確認する	変数の妥当性を確認する	変数によって「現実モデル」の妥当性を確認する
ζ 応用	変数を再抽出する	他に考えられ得る変数の抽出，設定をおこなう	他に考えられ得る変数を検討する	変数を操作する

モデルを解釈すること，④数学的モデルを扱うこと，⑤モデルを検証すること，⑥モデルとその結果についての批判を熟考し，分析し，提供すること，⑦モデルとその結果（結果の原因を含む）について伝達すること，及び⑧モデル化の過程を監視し，統制すること，が含まれる。

(国立教育政策研究所, 2004, p. 31)

PISA 調査では，総合的な数学的能力を，「再現（Reproduction）」「関連づけ（Connections）」「熟考（Reflection）」という３つのクラスター（Cluster）で働きを

説明している。表１の規範的枠組みが，PISA 調査の「モデル化」能力について示されている３つのクラスターすべてに対応していない。けれども，網掛けした部分は，図１の図式における過程進行とは逆向きに過程が進行する際の変数の取り扱いを示しており，また，同一の過程において複数の異なる変数の取り扱いを示しているものもあり，能力の深化を表す３つのクラスターに符号する点もある。

３．数学的モデリング能力の再考

表１の規範的枠組みは能力の評定には役立つものの，数学的モデリング能力の評価に対して十分であるとは言えない。そこで，原場面を視点として数学的モデリング能力を，再度，見直してみる。

(1) 原問題から原場面へ

竹内・沢田（1984）によれば，「はじめに教師が問題を与え解かせる」(p. 16) ときの問題を原問題という。問題の発展的取り扱いの指導では，問題の数学的内容の発展を目指し問題づくりがなされる。数学的モデリング指導で取り上げられる事例の多くは，問題解決過程を重視するオープンな問題設定である。池田 (1999) によれば，数学的モデリングを促進する考え方は「現実の方向」と「数学の方向」に大別される。数学的モデリングでは，予め「着飾っている (dressing up)」問題が設定されているといった問題点も指摘されるものの，現実世界における場面が問題となり得ることを想定しておく必要がある。そのため，解決が一通りに定まらない場合もあり得る。そのような折，最終的な解決の拠り所の１つとして，問題解決者の経験などが解決を左右する場合があり得る。

(2) 原場面への注目とその意義

数学的モデリングで取り上げられる問題は，現実場面が出発点となっている「Ⅰ：変数が表示されていない問題」が多い。そのため，数学的モデリングでは，もとの問題場面が解決の拠り所となる場合が多々ある。数学的モデリング能力の評価において，記述された解答（テキスト）のみを評価対象とすることは，数学的モデリングの評価が十分であるとは言えない。そこで筆者は，「解決者が自身の経験にもとづき想起する場面」を指す原場面への注目を提案したい。数学的モデリング能力の評価にあたり，原場面へ注目することで解決結果（product）だけではなく，解決過程（process）を評価対象として，各過程への焦点化に役立つ。

(3) 原場面を視点とする数学的モデリング能力

図１で規定した数学的モデリングの図式のうち、「αモデル化」の過程に対し，現実世界に関係する原場面が果たす役割として次の３点が挙げられる。

(1) 現実モデルもしくは数学的モデルを保証する役割
(2) 解釈の拠り所としての役割
(3) 「αモデル化」の妥当性を検証する役割

これらの役割に対応する形で，次の６点の数学的モデリング能力を指摘することができる。

(1a) 自身の数学的スキルに合うように，変数を変化させることができる。
(1b) 自身の数学的スキルに合わせて，変数間の関係を構築できる。
(2a) 得られた結果は，どの変数に由来するものであるか確認できる。
(2b) 参照している変数は，条件付与なされたものであることが確認できる。
(3a) 問題を構成する変数を見出すことができる。
(3b) 独立変数と従属変数に変数を区別することができる。

これらの能力は，現実世界に関係する原場面の役割に注目し，さらに図１の図式に合わせた形で記述できる暫定的な能力であり，数学的モデリングの実際との照合により，補完していくことが必要となる。

４．数学的モデリング能力の追跡

問題の変容に対する変数パースペクティヴによれば，数学的モデリング指導の目標に応じて構成される問題は，雑多な変数の場合もあれば簡素な変数の場合もあり，成功的な問題解決のためには，表１に示したような変数の的確な処理が求められる。問題解決において生徒が困難であるのは，解決に必要な変数間の関係を構築することである（Chick, Watson and Collis, 1988)。

数学的モデリングの進行にともない問題は変容し，問題を構成する変数やその取扱いに相違が生じてくる。実際，数学的モデリングにおいて問題はどのように変容し，問題を構成する変数間の関係はどうなっているのか。また，生徒は変数

間の関係をどのように捉えているのだろうか。

(1) 数学的モデリングの視覚化

成功的な解決への到達を評価することは必要ではあるが，それだけでは十分であるとは言えない。解決の過程を重視する数学的モデリングにおいて，成功的でない解決であっても，どのような過程を経て解決に至ったのかを評価する必要がある。そこで，課題分析マップを援用し，数学的モデリングの実際を記述する。

課題分析マップは，教育目標の分析，解答記述等をもとにした誤答分析，学習の質的評価の手立てとして用いられている（ビッグス・テルファー，1985; Chick, Watson & Collis 1988; Stillman, 1996; Stillman & Galbraith, 1998)。課題分析マップでは，問題解決で用いた数学的変数(●)と数学以外の変数(○)が区別される。変数間の結びつきは弧で示され，途中の帰結が関連する変数同士を結ぶ直線の交点として示され，変数間の関係を視覚的に捉えることができる。また，左上の変数からはじまり右下の変数へとマップを辿っていくことで，解決の進行を看取ることができる。

本研究では，解決に用いた変数すべてを項目として採用するため，原場面も項目として採用する。数学に関係する原場面については◉，現実世界に関係する原場面については◎で示す。また，インタビュー記録によるデータについては＊をつけておく。

(2) 数学的モデリングの追跡調査

数学的モデリングの実際を追跡するために，数学専攻の大学院生 IH を被験者とする事例を取り上げる。被験者には発話思考法による問題解決を依頼した。参照する調査データは，ワークシートへの解答記述（テキスト），発話プロトコル，そして，第１回目の事後インタビューの結果である。調査は２回に分けておこなった。各回の課題と手順は以下の通りである。

①第１回目の調査

はじめに「机で読書をするために必要な明るさはどれくらいですか。」という現実場面を提示し，４つの課題に取り組む。

(1) 上の問題を解くにあたって必要なことは何ですか？ (2) (1)を考えるにあたって，どのようなことをイメージしましたか？ (3) (1)の必要なことの全部もしくは幾つかを使って問題をつくって下さい。 (4) (3)でつくった問題を，実際に解いてみて下さい。

②第２回目の調査

第１回目の調査時の発話プロトコルやワークシート等の資料をもとに，インタビューをおこなった。その後，ルクス計を用いて，調査を実施したセミナー室の明るさを測定し，再び課題に取り組む。第１回目の調査で提示した現実場面，セミナー室の寸法，住宅に関するJIS照度基準を，下記の５つの課題の前に提示した。

(1) 前頁のデータを参照して問題をつくります。問題をつくるにあたって，どのようなことをイメージしますか？ (2) 問題をつくるにあたり，前頁のデータ以外に必要なことは何ですか？ (3) 前頁のデータ及び(2)の必要なことの全部もしくは幾つかを使って問題をつくって下さい。 (4) (3)を考えるにあたって，どのようなことをイメージしましたか？ (5) (3)でつくった問題を，実際に解いてみて下さい。

(3) 数学的モデリングの実際

IH の問題解決過程のうち，第１回目の調査についての課題分析マップが図２，第２回目の調査についての課題分析マップが図３である。

①第１回目の調査

IH は「Ａ君が読書をしています。Ａ君は健康に気を遣う少年で，十分な光量を必要とし，机にしっかり座って，読書をしようと思いました。そのとき照明との明るさはどれくらいがよいか。」という問題をつくった。これは，提示された問題が現実場面であるのに対し，現実モデルに相当する。

明るさの単位が分からず，また，明るさと距離の関係も与えられておらず，「距離が離れると暗くなる」という原場面をもとにして，反比例の関係を仮定している。途中，光の速度 C と時間 T という２つの変数に対する処理を実行するものの，解決には直接影響するものではないことが分かり，処理を中断している（マップ上“]”で示してある)。結局，「反比例の関係」と「MKS 単位系」という２

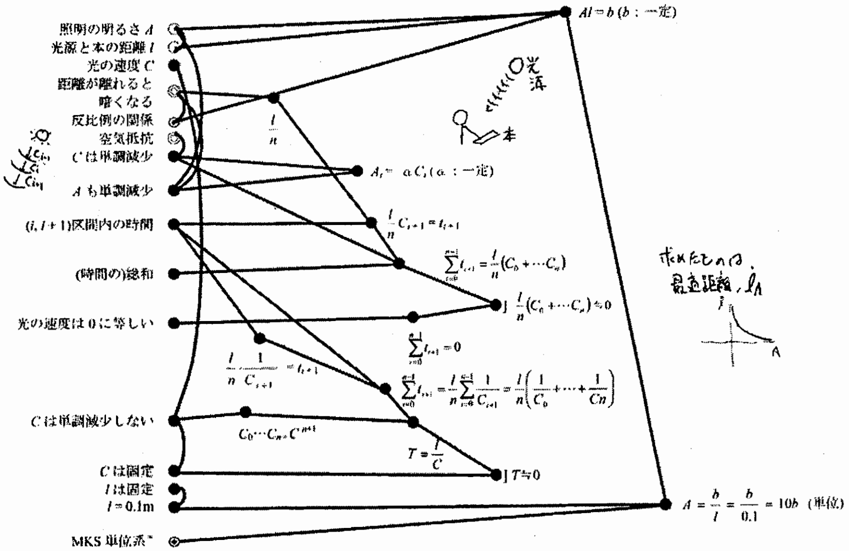

図２．第１回目の課題分析マップ

つの原場面が，最終的な結論を導くのに作用しており，「照明の明るさ A」と「光源と本の距離 l」という２変数からなる数学的結論が導かれた。

②第２回目の調査

はじめに，巻尺とルクス計で計測した「明るさ P」と「光源からの距離 l」に関する実データを表にまとめ，それらの関係を探っている。対応表をグラフ化し，そのグラフから比例関係でないことを結論づけている。

今回，IH は，「光源自体は1,000ルクスとする。光源と書物との距離の最適はどれくらいか。ちなみに，このデータは外光も含む。」という問題をつくった。第２回目の調査における解決では，第１回目の調査で自身が仮定した原場面「反比例の関係 $(Al=b)$」が解決全体に作用している。結局，測定した実データに対して十分満足のいく近似が出来ず，原場面「反比例の関係 $(Al=b)$」自体を疑っていた。一応の数学的結論は得られたものの，「$Al=P$ は成り立つか」といった原場面があるように，第１回目の調査で仮定した「反比例の関係 $(Al=b)$」を反省的に考察していた。

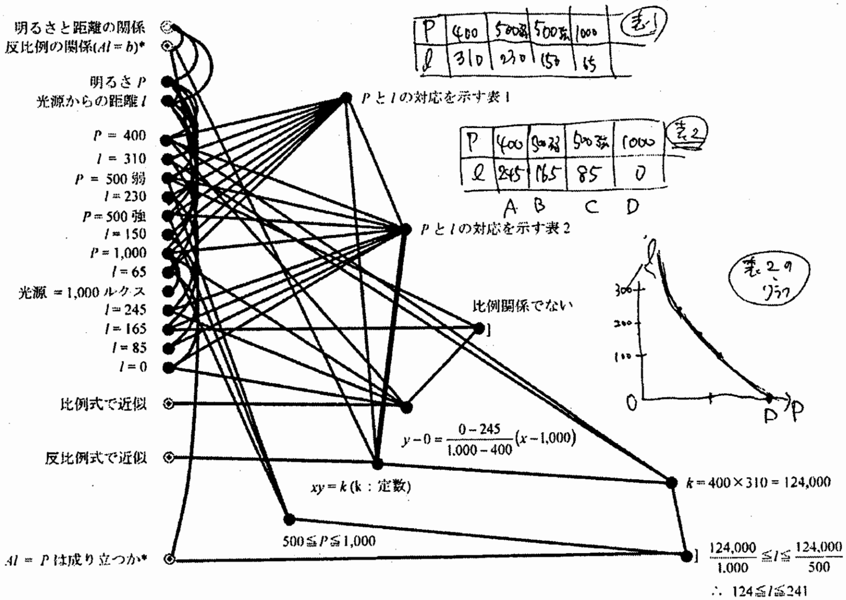

図３．第２回目の課題分析マップ

(4) 規範的枠組みにもとづく数学的モデリング能力

ここでは，表１に記した数学的モデリング能力の規範的枠組みと照合しながら分析をおこなう。参照する変数は，数学に関する変数(●)と数学以外の変数(○)である。表１の各能力について，解決過程の進行にともなう問題の変容（Ⅰ～Ⅳ）に対する数学的モデリングの各過程（$\alpha \sim \zeta$）を添字にして表す。例えば，「Ⅰ：変数が表示されていない場合」の問題に対する「α モデル化」の過程であれば［能力Ⅰ$_\alpha$］となる。

①第１回目の調査から看取できる能力

はじめに提示された問題（現実場面）に対し，「距離の明るさ A」「光源と本の距離 l」「光の速度 C」という３つの変数が選択される［能力Ⅰ$_\alpha$］。これら３つの変数のうち，２つの変数 A と l が選択され数学化される［能力Ⅱ$_\beta$］。途中の帰結として，変数 C は０として考えてもよく，変数 C は破棄されることになる［能力Ⅳ$_\beta$］。また，数学的モデル「$Al = b$ (b：一定)」において「$l = 0.1\mathrm{m}$」と仮定することで，「$A = 10b$ (単位)」という数学的結論が導かれる［能力Ⅳ$_\gamma$］。

第1回目の調査から確認できる数学的モデリングの過程進行は,「Ⅰα→Ⅱ$_\beta$→Ⅳ$_\beta$→Ⅳ$_\gamma$」と記述される。これから,問題の変容にともなう「β数学化」の過程についての漸次的進行を確認できる。漸次的進行のⅣ$_\beta$において変数Cを破棄する際,「数学的モデル」を参照していることから,「β数学化」の漸次的進行の能力として,「『数学的モデル』に対する変数の妥当性を確認する」という能力を指摘することができる。

②第2回目の調査から看取できる能力

はじめに,測定した実データである「明るさP」と「光源からの距離l」が変数として特定されている。これらの実データを対応表にまとめ,2変数Pとlの関係をまとめている[能力Ⅲ$_\beta$]。次に,表1を修正した表2の対応表から,Pとlは比例関係ではないという結論が導かれる[能力Ⅳ$_\gamma$]。結果として,Pとlの関係を反比例の関係として捉え直し[能力Ⅳ$_\beta$],Pの実データの範囲が「$500 \leqq P \leqq 1{,}000$」であることから,最終的な結論「$124 \leqq l \leqq 241$」が導かれる[能力Ⅳ$_\gamma$]。

第2回目の調査から確認できる数学的モデリングの過程進行は,「Ⅲ$_\beta$→Ⅳ$_\gamma$→Ⅳ$_\beta$→Ⅳ$_\gamma$」と記述される。これから,「γ数学的作業」の過程の後に「β数学化」の過程へと立ち返っており,図1に示された数学的モデリングの図式の矢印とは逆向きの過程の進行を確認できる。Ⅳ$_\beta$で参照しているモデルは「数学的モデル」に相当する対応表であり,Ⅲ$_\beta$でつくった数学的モデルを前提とした考察したことに因る。

(5) 原場面を視点とする数学的モデリング能力

4.(3)で見てきたように,数学的モデリングの進行に原場面の作用が認められる。ここでは,3.(3)で挙げた現実世界に関係する原場面を視点とする数学的モデリング能力と,数学に関連する原場面を視点として導かれる能力についてみていく。

①第1回目の調査から看取できる能力

現実モデルに相当するIHがつくった問題は,「距離が離れると暗くなる」という現実世界に関係する原場面を経て,「$Al = b$ (b:一定)」という数学的モデルへと数学化される。このとき,「反比例の関係」という数学に関係する原場面が想起されている。ここで,「距離が離れると暗くなる」という原場面は(1)の役割を担っており,「照明の明るさA」という変数は「Aも単調減少」という変数へ変化している[能力(1a)(1b)]。同様に,「空気抵抗」という現実世界に関係する原場

面は，「$A_i = \alpha C_i$（α ：一定)」という数学的モデルへと数学化される際，「光の速度 C」が「C は単調減少」という変数へ変化している［能力(1a)(1b)］。上述の「反比例の関係」という原場面は，「β 数学化」の過程に作用している。ここで記述できる能力は，「自身が妥当と考える数学的文脈に合わせて各変数を関係づけることができる能力」となる。

また，「MKS 単位系」という数学に関係する原場面を経て，明るさと距離に関する「$Al = b$ (b：一定)」という関係に対して，未知である明るさの単位に関する数学的結論を導いている。つまり，「MKS 単位系」という原場面は「γ 数学的作業」の過程に作用している。ここで記述できる能力は，「導こうとする数学的結論について変数を決定することができる能力」となる。

②第２回目の調査から看取できる能力

「明るさと距離の関係」という現実世界に関係する原場面は(3)の役割を担っており，「明るさ P」と「光源からの距離 l」という２つの変数が選択される［能力(3a)]。このとき，第１回目に導いた数学的モデルを前提とする「反比例の関係($Al = b$)」という数学に関係する原場面が改めて想起されている。つまり，「反比例の関係（$Al = b$)」という原場面は，数学的モデリングのはじまりで作用しており，ここで記述できる能力は「前提となるモデルの変数および変数間の関係の妥当性を確認することができる能力」となる。

「比例式で近似」という数学に関係する原場面は，測定した実データから関数を求める「β 数学化」の過程に作用している。ここで記述できる能力は，「変数間の関係を数学的に表現できる能力」となる。次の「反比例式で近似」という数学に関係する原場面は，比例関係ではないという数学的結論から想起されたものであり，つまり，「反比例式で近似」という原場面は「γ 数学的作業」に作用している。ここで記述できる能力も，「変数間の関係を数学的に表現できる能力」と言える。

最終的に得られた数学的結論は，「$500 \leqq P \leqq 1{,}000$」という問題に即した条件下で求められた「光源からの距離」の範囲である。ここで，「$Al = P$ は成り立つか」という数学に関係する原場面は，はじめの「反比例の関係（$Al = b$)」とともに数学的結論へ作用している。しかし，過程の中断を示す“]”が結論に付記されているように，その結論に確信を持てずにいた。図３の課題分析マップからは，能力(2a)と(2b)について確認できない。

5．おわりに

本研究では，数学的モデリング能力を，「数学的モデリングの各過程を遂行するのに必要な能力」と定義した。数学的モデリング能力の枠組みを議論する際，数学的モデリングの図式を規定し（図１），解決に必要な変数の取り扱いを手続きとして示した（表１）。また，「解決者が自身の経験にもとづき想起する場面」である原場面に注目することで，数学的モデリングの各過程に焦点をあてた。

数学的モデリングの実際を追跡する方法として課題分析マップを援用し，問題の変容にともなう変数の変化と変数間の関係の視覚化を可能にした（図２および図３）。そして，数学専攻の大学院生を被験者とする調査にこの方法を適用し，表１の規範的枠組みと合わせて数学的モデリング能力を確認した。

既述の数学的モデリング能力は，現実世界に関係する原場面の役割を視点として記述したものであった。そこで，数学に関係する原場面を手がかりとして，次の３点の数学的モデリング能力を指摘することができた。「β 数学化」の過程では，「自身が妥当と考える数学的文脈に合わせて各変数を関係づけることができる能力」と「変数間の関係を数学的に表現できる能力」，「γ 数学的作業」の過程では，「導こうとする数学的結論について変数を決定することができる能力」と「変数間の関係を数学的に表現できる能力」である。また，数学的モデリングのはじまりにあたっては「前提となるモデルの変数および変数間の関係の妥当性を確認することができる能力」が指摘できた。

このように，原場面に注目して既述の数学的モデリング能力を補完していくことにより，各過程に即した能力の補記が可能となる。今後も，数学的モデリングの実態調査を通じて，数学的モデリング能力の補記をおこなっていく。また，問題の変容にともない変数は変化する。解決者が問題解決において想起する原場面も様々に変化する。数学的モデリング能力を促進する指導の手立ての１つとして，原場面の転換を促す指導などが考えられる。そのような指導実践をおこない，モデリングの実際を検討することが今後の課題となる。

註

本稿は，第29回日本科学教育学会年会（岐阜大会）の自主企画課題「数学的モデリングにおける実践的研究のあり方について」における発表（松嵜，2005）と，第６回筑波教育学会における発表（松嵜，2007）を踏まえて再構成をおこなった。

脚註

(1) Chief Organizer である Blum が，90年代の数学的モデリング研究の流れは「1．コンピュータ利用の普及（Extended Use of Computers)」「2．認識論的議論（Epistemological Arguments)」「3．評価への焦点化（Focus on the Assessment)」「4．生徒の学習への焦点化（Focus on Students Learning)」であるとした上で，今後予想される研究動向として，次の5点を挙げていた：「1．学校カリキュラムにおける数学的モデリング（Mathematical Modelling in the School Curriculum)」「2．実際環境における数学に関する生徒の調査研究（Research Studies into Students Mathematics in Real Environment)」「3．他教科への数学の関わり（Linking Mathematics to Other Subjects)」「4．数学的モデリング文脈の中での評価（Assessment in Mathematical Modelling Context)」「5．数学的モデリングの指導に関連した理論的問題と認識論的問題（Theoretical and Epistemological Questions Related to Teaching Mathematical Modelling)」

参考・引用文献

池田敏和（1999)．数学的モデリングを促進する考え方に関する研究．*日本数学教育学会誌：数学教育学論究，71・72*，3－18.

大澤弘典（1996)．現実場面に基づく問題解決―グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して―．*日本数学教育学会誌，78*(9)，16－20.

国立教育政策研究所［監訳］(2004)．*PISA 2003年調査 評価の枠組み― OECD 生徒の学習到達度調査―*．ぎょうせい．

清水美憲（1987)．数学的問題解決における問題意識と「問題」の変容に関する一考察．*筑波数学教育研究*，6，15－22.

竹内芳男・沢田利夫（1984)．*問題から問題へ―問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善―*．東洋館出版．

松嵜昭雄（2001)．*数学的モデリングの評価に関する基礎的研究―現実世界における問題の解決過程に焦点をあてて―*．筑波大学教育学研究科中間評価論文（非公刊)．

松嵜昭雄（2002)．原場面の役割を視点とする数学的モデリング能力の同定―オーストラリア・ビクトリア州における数学教科書の問題分析を通じて．*筑波数学教育研究，21*，55－62.

松嵜昭雄（2005)．数学的モデリング能力の特定方法に関する一考察．*日本科学教育学会第29回年会論文集*，187－190.

松嵜昭雄（2007)．数学的モデリング能力の特定に向けて―原場面への注目と課題分析マップの援用―．*筑波大学教育学会第6回大会発表要旨集*，4－5.

三輪辰郎（1983)．数学教育におけるモデル化についての一考察．*筑波数学教育研究，2*，117－125.

Biggs, J. & Telfer, R. (1987). The Process of Learning(2nd edition). New South wales, Australia.（並木博・岩田茂子・藤谷智子・長井進［訳］(1985)．教師と親のための心理

学―教育と学習の過程Ａ：基礎編―．啓明社．※初版（1981）の訳本）
Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Didaktischen Disukussion. *Mathematische Semesterberichte, 32* (2), 195-232
Chick, H., Watson, J., and Collis, K. (1988). Using the SOLO Taxonomy for Error Analysis in Mathematics. *Research in Mathematics Education in Australia.* 34-46.
De Lange, J. (1996). Chapter2: Using and Applying Mathematics in Education. In Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., and Laborde, C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49-97). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
IKEDA Toshikazu & Stephens, M. (1998). Some Characteristic of Students' Approach to Mathematical Modelling in the Curriculum on Pure Mathematics. *Journal of Science Education in Japan(Kagaku Kyoiku kenkyu), 22* (3), 142-154.
MATSUZAKI Akio (2007). Chap3.5.5. How might We Share Models through Cooperative Mathematical Modelling?: Focus on Situations Based on Individual Experiences. In Blum, W., Galbraith, P., Hans-Wolfgang, H., and Niss, M. (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 357-364). New York: Springer.
SMP (1991). 16-19 Mathematics: Problem Solving, Pupil's Text. Cambridge University Press
Stillman,G. (1996). Mathematical Processing and Cognitive Demand in Problem Solving. *Mathematics Education Research Journal, 8* (2), 174-197.
Stillman,G. & Galbraith,P. (1998). Applying Mathematics with Real World Connections: Metacognitive Characteristics of Secondary Students. *Educational Studies in Mathematics, 36*(2), 157-195.