依頼論文

オランダの数学教育の動向
―― Realistic Mathematics Education の理論と実践 ――

大　谷　　　実※

Mathematics Education in the Netherlands:
Developments in Theories and Practice of Realistic Mathematics Education

Minoru OTANI

１．はじめに

本稿では，オランダ王国における数学教育の動向を，ユトレヒト大学の「フロイデンタール研究所」（Freudenthal Institute：略称 FI）で開発され，展開されている Realistic Mathematics Education(1)（略称 RME）の理論とその実践に及ぼしている影響を，RME 基本理論の展開を述べている文献ならびに現地調査で得た教科書，テスト，課外活動等の情報に基づき整理する。ここで「実践」とは，教科書等の意図したカリキュラムをさし，実際の授業，生徒の活動の観察記録ではない。

わが国で Realistic Mathematics Education の定訳はない。“realistic”とは，次節で述べるように「現実感のある」という意味であり，RME は「現実感のある算数・数学教育」と訳せるが，本稿では RME の略記を用いる。

本稿の論を構成する際，一方で，一国の数学教育の動向を述べることは，たとえ粗いレベルであっても大変難しいことであるが，RME の理論はオランダ王国（以下，オランダ）の数学教育の実践の基本原理として深く根付いている。この意味で，一研究所の活動を視点としてオランダの動向を語ることも，ある程度許容されるように思われる。他方で，フロイデンタール研究所の RME は国際的に遍く認知されており，グローバルな水準で教育政策・教育実践・学術研究活動に大きな影響を与えている。例えば，RME は OECD/PISA の調査の枠組みの基底を

※金沢大学　学校教育系

なしていること（伊藤，2009），コロラド大学ボルダー校の「米国フロイデンタール研究所」(FIUS）が RME に基づくミドルスクール向けの教科書『Mathematics in Context』（略称 MiC）を開発していること，さらに，各年で「国際 RME 会議」(2)が開催されていること等があげられる。わが国をはじめとして，RME の理論を標榜する研究や実践は多いけれども，オランダそれ自体の実情に関する把握は，管見する限り多くはなく，その中には今後わが国で着目に値するテーマもあるように思われる。

以下，論を次のように構成する。先ず，RME とは何かに関して，その理論の基本原理を紹介する（第 2 節）。次に，オランダにおける RME の実践を，学校制度，教科書，国家試験，コンテストの側面から考察する（第 3 節～第 6 節）。最後に，RME の理論と実践から，わが国の教育研究と実践に対して示唆的であると思われる事項を述べる（第 7 節）。

2．RME の基本原理とその多声性

RME は，ハンス・フロイデンタール（Hans Freudenthal：1905－1990）が著した数学論や教授論を基にしている。「現実感から出発し，現実感にとどまる数学」（Freudenthal, 1987），「数学化すること」（mathematizing）や「追発明」（re-ivention）（Freudenthal, 1974）を重視する。フロイデンタール自身の数学論・教授論については，伊藤がその形成過程を踏まえて体系的に再構成し，その特質を解明している（伊藤，2007a，2007b など）。第 3 節で述べるように，フロイデンタールを中心とする研究グループが，初等学校や中等学校における数学教育改革を推進し，やがてオランダで広く受け入れられるようになるまでには長い年月を要している。RME は，フロイデンタールを主導者とつつ，多くの研究者によりそれぞれのアクセントや解釈をともないながら漸次構築された協働的な理論の複雑な総体である。ファン・デン・ヒューヴェルによれば，RME 理論の開発はトレファース（Adri Treffers）とホフリー（Fred Goffree）に負うところが多く，それは「一般」(general）と「局所」(local)，さらに「何を」(what）という内容と「いかに」(how）という方法の視点により整理できる（van den Heuvel-Panhuizen, 2001）。

RME の一般理論は，「有意味な人間の活動」，「水平的数学化」（horizontal mathematization）と「鉛直的数学化」（vertical mathematization）を目的として

いる。水平的数学化と鉛直的数学化は，トレファースとホフリーが考案したもので，他の数学教育のタイプ（経験的，構造的，機械的）と区別しつつ，RME が目指すべきタイプを特徴づけたものである（Treffers, 1986：70）。水平的数学化は，「経験的方法・観察・実験・帰納的推論を通して，問題を確実な数学的手段によってアプローチできる様に変形すること」，鉛直的数学化は「水平的数学化に続き，数学的処理，問題の解決，解決の一般化，更なる形式化に関連する活動」（ibid, 71）である。

RME の有意味な人間の活動や数学化を実現する方法に関して，６つの一般的原理が提示されている（van den Heuvel-Panhuizen, 2001：35）。これらは「教授」と「学習」の側面に分けられる。これらの原理もまた，トレファースとホフリーに多くを負うている。

主として教授に関連する原理

・現実感の原理（Reality Principle）(3)：実生活など現実感のある文脈を伴う問題を提示すること。

・関連付けの原理（Inter-twinment Principle）：教師が数学の内容を様々な内容領域の内外で関連付けを図ること。

・導きの原理（Guidance Principle）：児童・生徒がみずから考えを作り出すことを通して数学を追発明するよう教師が手立てを講じること。

主として学習に関する原理

・活動の原理（Activity Principle）：児童・生徒が数学の学びへ活動的に参加すること。

・水準の原理（Level Principle）：児童・生徒の学びが一般性を高める水準へ徐々に高まること。

・相互作用の原理（Interaction Principle）：児童・生徒が個人的に思考し，社会的にかかわること。

かくして，RME の一般論では，児童・生徒が，現実感のある問題場面からスタートし，問題場面を自らの考えや表現を用いて表し，教師の導きや児童・生徒との関わりの中で，次第に考え方をより一般的なものへと洗練させながら，最終的に公的な数学的知識や形式化した方法を追発明する活動を大切にする。

局所的な教授理論では，例えば「整数の計算」という内容に関して，「漸進的図

式化」(progressive schematization),「方略のつながり」(connected strategies),「生産的練習」(productive practicing) の方法がセットとなっている (ibid: 35)。

ファン・デン・ヒューヴェルは上述のように RME 理論の構造を概略しているが,そこにはいくつかの視点が抜け落ちているように思われる。例えば,デ・ランゲ (de Lange, J., 1984) は,後期中等教育段階におけるプロフィール別の数学科カリキュラムを開発する際に,数学化を「概念的数学化」(conceptual mathematation) と「応用的数学化」(applied mathematization) の2つの側面に分けた理論枠組みを構築している。また,フラーヴメイヤー (Gravemeijer, K., 1991) は,導きによる特定の数学的知識の追発明やそれを奨励する相互作用の原理を明確に意識しながら,「状況」,「参照」「一般」「形式」からなる4つの水準からなる「創発的モデル化」(emergent modelling) を構築している。これらは,RMEの理論の発展においてどのように位置づけられるのであろうか。これは,RMEが目的とする水平的数学化と鉛直的数学化の複雑な関係をモデルの機能という分析の単位により首尾一貫して扱い,方法にかかわる6つの原理も組み入れつつ,最終的に数学の追発明をも保証するもので,一般の RME 理論と局所の RME 理論を統合する理論であるようにも思われる。

様々な研究者が固有のアクセントや解釈によりRME 理論を特徴づけており,実に多声的な理論である。RME 理論の形成過程を踏まえ,体系的に再構成することは数学教育史の一つの研究テーマであると思われる。

3.オランダにおけるRMEの開発と普及

1980年以降,RME はオランダの数学教育全体に強い影響を与え,教育目標の設定,教育課程の開発,教科書の編集などに反映されている (Treffers, 1991: 11)。以下,オランダの学校体系を視野に入れながら,RME の開発と普及発展を述べる。

先ず,オランダの学校体系を紹介する (リヒテルズ,2004: 127)。初等教育は8年制 (4-12歳) で,各学年は第1グループから第8グループと呼ばれる。初等教育学校は「基礎学校」(Basisschool) と呼ばれる。義務教育は,第2グループ (5歳) から16歳までの11年間で,公立・私立を問わず無償である。学校区などはなく,児童・生徒は自由に学校選択ができる。前段階の卒業資格 (ディプロマ) が上級段階の入学資格となる。基礎学校の卒業は,校内試験と9割以上の学校が受ける全国一斉のシト (CITO: Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling, オラ

ンダ測定評価研究所）テストの総合評価により認定される。

中等教育は複線型で，児童は，小学校卒業時の12歳で３種類の中等教育のコースから選択する。それらは，４年制の中等職業訓練学校準備コース（VMBO），５年制の高等職業専門学校準備コース（HAVO），そして６年制の大学準備教育コース（VWO）であり，生徒の割合はおおよそ６割，３割，１割である。中等学校は下部構造（VMBO は２年間，HAVO と VWO は３年間）と上部構造に分けられ，教育文化科学省は，３つのコースごとに少しずつ到達レベルは異なるものの，各コースで共通性の高い目標を定めている。コース間，下位コース間の移動を可能にするため，中等学校は通常３つのコースを併設している。上部構造では，HAVO と VBO では，必修科目（約４割），４つの下位コース（自然・健康科学系，自然・技術系，社会・文科系，社会・経済系）の専門科目（約４割），自由選択科目（約２割）を履修する。中等学校の卒業資格を得るには，それぞれ半分の比重を占める CITO による「全国共通試験」と校内試験（一連の課題のポートフォリオ評価）に合格する必要があり，両試験に合格すれば希望する大学に入学することができる。

教育文化科学省は学校段階ごとに必履修教科とその「中核目標」（Core Goals）を大綱的に示しており，これが唯一の法的拘束力を有する文書である（O&CW, 2004）。ファン・デン・ヒューヴェルらによれば，各学校は自由裁量により数学のカリキュラムを策定するが，その際に決定的な役割を演じているのが，フロイデンタール研究所が開発した「Proeve」と「TAL」と呼ばれるガイドライン並びに市販の教科書である（van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005）。Proeve とは「初等学校の数学教育のための国家プログラムのデザイン」（Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool）の略である。「国家プログラム」と銘打っているものの，Proeveは，政府の公的な文書ではなく，1980年代末頃より，フロイデンタール研究所のトレファースらによって作成されたものである（Treffers et al., 1989, 1990, 1994, 1996）。他方で，TAL とは「中間目標を見据えた学習－教授軌道」（Tussendoelen Annex Leerlijnen）の略称であり，中核目標の改良版である。これは，1997年よりオランダ教育省の援助により開始されたフロイデンタール研究所を中心とする研究プロジェクトの成果である。「学習－教授軌道」は，中核目標に到達するまでに児童が通過する中間の目標を示唆するもので，第１グループから第８グループの児童

の数学的理解の発達に関して，長期的な概観を与え，教育がその発達の過程をどのように支援し，刺激するかについての「心的な地図」（van den Heuvel-Panhuizen, 2005）である。現在，４つの内容領域（整数，測定，図形，割合）で開発がなされている（van den Heuvel-Panhuizen et.al, 2001, 2005；van Galen et.al, 2008）。

オランダの数学科カリキュラムや教科書に対して，フロイデンタール研究所は大きな役割を果たしてきた。このことを学校段階毎に述べる。

初等教育段階でのカリキュラムと教科書は，フロイデンタール研究所の前身の「数学教育開発センター」（IOWO）において，ホフリーとトレファースらにより1968年に開始された「ヴィスコバス（Wiscobas）プロジェクト」から多大な影響を受けている。RME の原理にもとづく教科書は，1980年代には全体の約５％であったが，1990年には約75％にまでシェアを急速に拡大した（Treffers, 1991）。

中等教育では３つのコースごとに到達水準に少しずつ違いはあるものの，下位構造は「基礎形成教育」（Basis Vorming）段階であるとして，コース間で共通性の高いカリキュラムが編成されている。中等教育の上部構造の HAVO と VWO では，後の進路に応じて「数学Ａ」と「数学Ｂ」の科目を選択履修する。「数学Ａ」は，大学や高等職業専門学校の専門課程で数学の継続的学習をさほど必要としないが，数学を道具としてある程度使用できなくてはならない社会・文科系、社会・経済系の専門プロフィールに属する生徒を対象としている。その中心内容は離散数学，確率・統計，若干の微積分からなり，数学の応用，モデル化，高次の思考，問題解決のプロセスを重視している。他方の「数学Ｂ」は，大学や高等職業専門学校で数学・自然科学・工学などを学ぶ自然・健康科学系，自然・技術系の専門プロフィールに属する生徒向けの科目である。中心内容は微積分で、抽象的な純粋数学も扱われる。「数学Ａ」は，フロイデンタール研究所のヤン・デ・ランゲ（Jan de Lange）とマーティン・キント（Martin Kindt）らが1981年に組織した「ヘヴェット（Hewett）プロジェクト」において開発され，1985年より実験的に試行され，1989年から正式に導入された科目である（de Lange, 1987）。従って，「数学Ｂ」は「数学Ａ」の開発の過程で編成されたものであり，重要なことは「数学Ａ」という科目の開発であった。近年は，生徒の学力に配慮した学習の分化のために，「数学Ａ」と「数学Ｂ」に加えて，「数学Ｃ」と「数学Ｄ」の科目が加わった。「数学Ｃ」は「数学Ａ」のレベルを落としたもの，「数学Ｄ」は，「数学Ｂ」

のレベルを上げたものである。筆者は統計的なデータを持ち合わせていないが,「数学Ｃ」と「数学Ｄ」の履修割合はあまり高くはないとのことである。また,生徒全体の凡そ6割が学ぶVMBOでは,RMEからみた改革が充分ではないようである。この分野では,ファン・デア・コーイが,「仕事場における数学は,洗練した数学を初等的に使うというよりも,むしろ初等的な数学を洗練したしかたで使うものであるべきである」という原則のもとで,職業準備コースにおける数学教育改革プロジェクト「TWIN Project」に取り組み,実験教科書を開発している(van der Kooij et.al., 2003, 2004)。

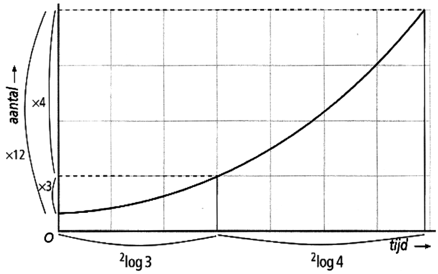
　このように,フロンデンタール研究所が初等・中等教育段階のカリキュラム開発に大きくかかわってきたことがうかがわれる。他方で,フロイデンタール研究所の所員がオランダの教科書の編集や執筆にかかわることはない。Proeve,TAL, Wiscobas, HEWET, TWINとは実際どのようなものであり,それが学校でのカリキュラムら市販の教科書にどのように反映されているのかについてわが国では殆ど知られておらず,大切な研究テーマであると思われる。

４．教科書におけるRME理論の影響

　RME理論の何等かの側面が教科書にどのように反映されているかについて検討する。概して,RME理論の実践は初等段階に関する教材がほとんどであるように思われれる。ここでは,後期中等教育段階の教科書『Moderne Wiskunde』(現代数学)の素材を取り上げ,その取扱いにRMEが目指している数学化の側面がどの程度見られるかを検討する。

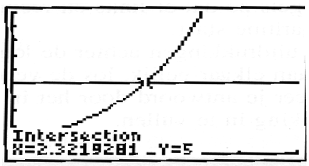
　以下で示すのは,中等教育上部構造VWOの第1学年「数学Ｂ１下」の「対数」の単元である(Boer et.al., 2004:31-47)。ここでは,「水草の成長」の場面で対数を導入している。問題場面として,「池で水草を育成している。池の管理人は,その成長を観察している。2002年4月1日に,水草がおおう広さは約1 dm^2で,1か月後には面積は3倍の広さになる。2002年4月1日を $t = 0$ としたときに,水草の広さAを求める式とグラフをかけ。また,水草が2 dm^2になるのはいつごろか。」(ibid, 30)という問題を考えながら,「水草が2倍の広さになるのに必要な時間を $\log_3 2$ で表す。」(ibid, 30)として対数を定義し,グラフを用いて対数の意味を考える。また,水草の成長の場面で,$\log_3 27 = 3$ や $\log_3 4 + 1 = \log_3 12$ なる関係を説明したり,$\log_3 x + 2 = \log_3 81$ なる方程式も場面に戻って解釈したりしなが

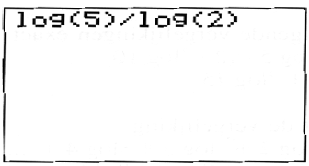
ら，解決する。また，水草の事象と成長のグラフに基づきながら，$\log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 12$ という対数の性質を理解する（ibid, 32）。



オランダの教科書では，実感を持って対数を学ぶよう，「時間」を対数のモデルとしている点で，現実感のある場面から数学的な概念を学び，その後に数学的定式化がなされることが確認できる。数学的な定式化がなされた後には，適度な割合で，現実世界の問題を解決する。これが「応用的数学化」と呼ばれるものである。例えば，次の問題がそれである。「電池は，１時間当たり残量全体の４％が消費される。残量がフル充電の20％以下になると電池は使用できなくなる。t 時間使用後の残量 P（％）を求める式を求めよ。電池の残量 P に対する使用時間 t の関係は，$t = \log_{0.96} \frac{P}{100}$ で与えられる。このとき，フル充電の電池の残量が50％となる時間を求めよ。また，フル充電の電池を使用できる時間を求めよ。」（ibid, 35）。

尚，オランダでは，初等学校の教科書では電卓が使用され，中等学校の教科書ではグラフ電卓ならびにコンピュータソフトウェアが頻繁に使用される。初等学校での CITO テストや中等教育修了資格のための「全国統一試験」では、それぞれ電卓とグラフ電卓の使用を前提とした問題が出題される。そのため、上部構造ではグラフ電卓も使用され始める。『Moderne Wiskunde』の最初の２章はグラフ電卓の使用法の手引きとなっている。上部構造では，本論中でグラフ電卓が頻繁に使用される。例えば，先に例示した「対数関数」の指導でグラフ電卓が用いられる。例えば、対数の底の変換に関して次のような問題が扱われている。「$2^x = 5$ の正確な解は $x = \log_2 5$ である。この近似値は，グラフ電卓で $y = 2^x$ と $y = 5$ の交点として求めることができる。$\log_2 5$ の値は、異なる方法でも計算して求めることができる。





$2^x=5$ から $\log_{10}2^x=\log_{10}5$ が導かれる。計算規則から $x\cdot\log_{10}2=\log_{10}5$ が導かれることを示せ。」(ibid, 34)。このような課題に取り組む過程で、生徒はグラフ電卓を用いて交点の座標を求めるだけでなく，実際に $\log_{10}5/\log_{10}2$ の値をグラフ電卓により計算して、両者の値がほぼ一致することを確かめながら、底の変換公式に実感を持つことができる。

グラフ電卓は，「応用的数学化」で例示した乾電池の消費のこの種の問題を解く際にも利用される。現実味のある場面で数学を活用するには、生のデータを扱うことになり、それをうまく処理する上でグラフ電卓が有効活用される。

5．CITO による全国共通試験

ここでは，CITO による数学Ａと数学Ｂの全国共通試験の問題例を各１題紹介する。

ここでは，最終試験問題集（Mark & Goede, 2002：141）から，2001年度の「数学Ａ１」（数学Ａの科目の一つで，Ａ２等もある）の問題構成と配点を示す。

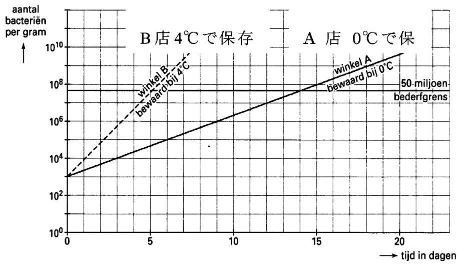
問　題	設問（配点：総点80点）
1　コントルダンス	1(3)，2(4)，3(6)
2　冷　蔵	4(4)，5(5)，6(4)
3　品質管理	7(3)，8(5)，9(3)，10(4)，11(4)
4　持ち上げる	12(3)，13(3)，14(6)，15(5)
5　ワインの貯蔵量	16(5)，17(5)，18(4)，19(4)

この問題のタイトルから予想されるように，すべての問題は現実感のあるものであり，RME の基本原理に根差している。以下では，「冷蔵」を取り上げる。この問題は，鶏肉の腐敗の進行を，細菌数と温度の関係から検討する場面がグラフで示され，３つの設問に答えるものである。以下は，その翻訳である。

冷蔵

ワーヘニンゲンの研究所では食物の中の細菌の数の増え方を調査した。一定の温度で細菌の数は指数的に増えていく。温度は増殖因子の１つである。これについて，新聞記事の中にグラフがあった。それが右図である。細菌数が５千万まで増えたことを示す，両方のグラフと交わる直線がある。

グラフには０℃（Ａ店）と４℃（Ｂ店)でそれぞれ鶏肉を保存した場合の細菌の増殖を表している。(なお，グラフの縦軸は１グラム当たりの細菌数，横軸は日数である。)



４．０℃では１日で細菌がもとの細菌数の何倍に増えるか調べよ。（４点）

図では１グラムあたりの細菌の数は初め 1000 匹であった。腐り始めは細菌数が１グラムあたり５千万匹を超えたときとする。グラフから０℃で保存したときは14日で腐り始めることが読み取れる。

衛生状態の改善により，初めの細菌数を１グラム当たり1000匹から100 匹まで下げることができたので，生のまま長く保存できる。０℃（Ａ店）で保存すると17日間保存できる。４℃（Ｂ店）ではこの衛生状態の改善により３日間長く保存できる。４℃では細菌数は１日で，もとの細菌数の8.3倍に増える。

５．衛生状態の改善によって４℃で保存する場合，今までより何日間長く保存できるか。また答えが正しいか確認しなさい。ここで図が利用できるであろう。（５点）

図では一定温度下で，１日で，もとの細菌数の g 倍に増えることを計算できる。この調査で，g について次の公式が見出された。

$$g = 10^{0.0092(T+6)^2}$$

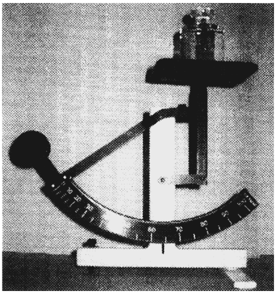
この公式で，T は摂氏で表した一定の温度のことである。この公式で，ある温度で，１日で何倍に増えるかを計算することができる。

次の問では，冷蔵庫の外に鶏肉を置いておくとし，室温は18℃であるとする。１グラムあたりの細菌数は，初め100匹である。腐り始めは５千万匹になったときとする。

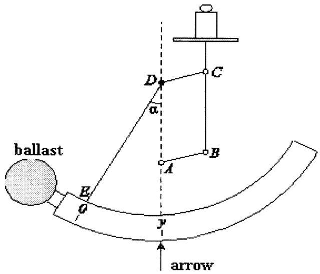
６．何日で腐り始めるかを求めなさい。（４点）

数学Bの問題として，ここでは「レタースケール」を紹介する（Stolwijk, 2008)。

レタースケール



写真



図

写真はレタースケール（手紙秤）である。この秤には64グラムの分銅が置かれている。右図には，y グラムの物をのせたレタースケールの仕組みが描かれている。この図はワークシートにもある。そこにある矢印は，D を中心として鉛直方向から回転した大きさで重量を示す点を示している。安定器は，秤に何ものせない時に結合部（固定されている）DE が鉛直になるようにする。ED と BC の連結部は固定されている。

y グラムの物を秤にのせると，結合部 CDE は点 D で角度 α ラジアン回転する。円形をした秤と安定器も回転し，矢印は秤の目盛で y の値を指す。点 A, B, C がヒンジ（蝶番）になっているため，秤はいつも水平な状態になっている。図を参照のこと。このレタースケールに関して，力学を用いることで，次の公式を導くことができる。

$$y = 70\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{1}{4}\pi\right)}$$ （α はラジアン）

1　測定と計算により y の値を決定しなさい。その際にワークシートにある図を用いなさい。答えをまるめて整数値にしなさい。あなたの作業を示しなさい。（３点）

2　$y = 70$ のとき，α の正確な値を求めなさい。（４点）

導関数 $\frac{dy}{d\alpha}$ は $\frac{dy}{d\alpha}=70\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{1}{4}\pi\right)}$ となる。

3　このことを証明しなさい。（4点）

この秤には1, 2, 3, … から100グラムまでの目盛がある。これらの目盛の間隔はいろいろと異なっている。α が一定の値を取るとき，目盛の間隔はもっとも大きい。この α の値に対して，$\frac{dy}{d\alpha}$ は最小になる。

4　$\frac{dy}{d\alpha}$ が最小になるとき，α の値を計算しなさい。答えは小数第二位まで求めなさい。（3点）

全国試験の問題は，出題形式はすべてここで示したものと類似である。それらは，現実感のある場面を取り上げている点て RME の一般的な原理（水平的数学化と鉛直的数学化）に合致している。他方で，問題を解決するには，形式的な計算，公式への数値のあてはめ，既に数学的に整備されたグラフや表を扱ったりするような小問いの課題から構成されており，断片的な数学的活動になっている。

6．数学コンテスト

全国試験の問題は，Hewett プロジェクトが意図した数学Ａの本来的な目的である，数学的モデル化，高次の思考，問題解決のプロセスを真に評価できるものとは言い難いという現実的な課題をかかえている。そこで，フロイデンタール研究所が考案したものが，探求的・協働的な数学コンテストである。

ここでは，オランダの中等教育段階における文系学生に対する数学コンテスト「MathA-lympiad」（数学Ａ-lympiad）について紹介する。数学Ａ-lympiad は，後期中等教育において科目数学Ａを履修する第11－12学年（16－18歳）の生徒のための数学競技会であり，ユトレヒト大学のフロイデンタール研究所が統括しているものである(Haan & Wijers, 2000)。その名称は数学Ａと数学 Olympiad の合成語であるが，その目的，実施方法，評価の在り方は数学 Olympiad と本質的に異なっている。実際，数学 Olympiad が，数学に優秀な個々の生徒を対象とするのに対し，数学Ａ-lympiad は，文科系の生徒を対象とし，参加校の生徒が３－４名でチームを編成し，現実世界のオープン・エンドな問題解決に取り組み，１日

がかりでレポートを作成するものである。

数学 A-lympiad は1989年より開始された。フロイデンタール研究所により「数学 A-lympiad 委員会」が組織され，カリキュラム開発者，教師，数学者が共同で評価問題を作成し，また生徒のレポートの最終評価を行う。競技会は予選ラウンドと決勝ラウンドからなる。予選ラウンドは11月，決勝ラウンドは３月に開催される。予選ラウンドは，同一の日に，午前９時から午後４時かけて各学校で実施される。予選ラウンドには，オランダの他，隣国ドイツ，デンマーク，オランダ領キュラソー諸島などから1000を超えるチームが参加する。その際に，問題は，英語，ドイツ語等複数の言語に翻訳される。チームの編成や競技会当日の運営は，各学校の裁量に任されている。

各学校は予選ラウンドのレポートを評価し，最優秀の論文（最大３篇）を数学 A-lympiad 委員会に推薦し，委員会は審査を通して決勝ラウンドに進出する12チームを選ぶ。さらに，デンマーク，ドイツ，キュラソー諸島から参加チームに応じて１－２チームが決勝ラウンドに進出する。決勝ラウンドは，３月の週末に Veluwe 国立公園の会議場に集い，新しい課題に取り組む。決勝ラウンドは，課題がより難しく，広範である。参加チームは，金曜日の11時から土曜日の13時まで問題に取り組み，見出した解決を英語で口頭発表する。

以下の課題は，2007年度の予選課題「Working wuth Breaks（休憩を取りながら働く）」である。「はじめに」で現実感のある状況が紹介され，以後，順次課題が提示される。この予選課題は，導入課題が２題，追加課題が２題，そして最終課題からなる。以下は，その翻訳である。

はじめに

誰でも経験していることだが，休まずに仕事をずっと続けることができない。例えば，食事を取る必要性などを仕事から除くとするならば，大半の仕事は肉体的に疲れるものであろうし，しばしば集中力を削っていくものであろう。10時間休憩なしで働くトラックの運転手や，まとまった休みもなく８時間働く教員や９時間も続けてコンピュータと向かい合うジャーナリストなど，これらすべての場合において疲れと集中力の欠如から小さなもしくは大きな事故が起こるかもしれない。

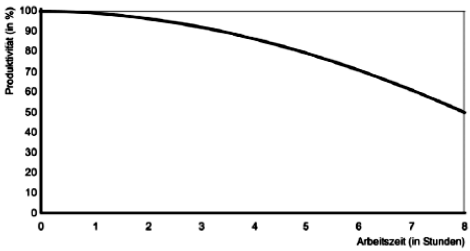
そのうえ，多くの仕事において生産力の低下が起こるであろう。この生産

力によって，工場での生産活動をたやすく調べるができる。

そこで休憩を取る必要がある。しかしこれらの休憩をうまく分配する方法はどんなものだろうか？より長い休憩を少なくか，短い休憩を多くか，それともその混合型か，最適なスケジュールの立て方を考えよう。

導入課題

経験とドイツの大会社の研究のよって，下にあるような一般的な状態が生産力と労働時間の間にあることが得られた（もっと詳細なグラフは付録1の中にある）。



長い時間働けば働くほど，生産力が下がっていくことが分かる。グラフでは，途中で休まず８時間働いた後，つまり休憩なしで働いた場合，生産力が50％に下がっていることが見られるだろう。

他の研究から休憩が生産力を向上させることが分かっている。休憩の後ちょうど，労働者の生産力が休憩の前よりも向上したのである。それどころか生産力がより早く，高い段階に戻っていたのである。研究によって次のような経験による方法を得た。

・（純粋な労働時間としての）最初の５時間の労働時間の中の休憩の後では，生産力は休憩が始まる前から休憩時間の3.5倍の長さの時間の分戻った。

経験による方法の例をあげよう。もし，ある労働者が８時から11：25分まで働くのなら11：25までに彼の生産力は最大値の90％に落ち込んでしまう。その時，労働者が40分の休憩時間を取ったとしたら，休憩の終わりには11：25の3.5×40＝140分前の生産力で仕事を再開するだろう。グラフを使って，新しい生産力を調べなさい。

・５時間以上の労働の後の休憩の後では，効果が少し小さくなる。この場合休憩後の生産力は休憩が始まる前から休憩時間の３倍の長さだけ戻るだろう。

課題１

前に取り上げたある会社では，労働時間は午前８時から，午後５時までである。12：00から昼食時間が１時間ある。それで，労働時間は９時間あり，実質的な労働時間は８時間である。

労働者は１時間あたり，最大600wpu（労働生産力単位）を生産する。この600 wpu が最大の生産力である。

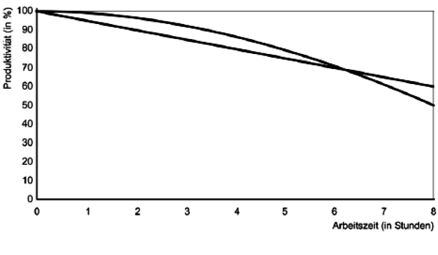
この会社の重役会議は主に１日を通した労働者の総生産力が主に興味がある。

a　グラフをもとに８時間続けて働いた場合の総生産力を見積もりなさい。これに対して付録１のグラフを使いなさい。

b　12：00 から13：00の１時間の休憩が与えられ，8：00から17：00まで働いているというスケジュールが与えられたときの生産力を見積もりなさい。どのようにグラフを使ったか明確に示しなさい。

追加課題

生産力の計算をより簡単にするために，簡素化したモデルである線形モデルを作ることを決めた。もともとのグラフとともに調整されたモデルのグラフを次のページで見ることができる。これを見ると，新しいモデルで，休憩なしで８時間続けて働くと仮定すると，生産力が直線上では100％から60％へと減少すると考えられる。



課題２

a　８時間続けて働く労働者の総生産力を計算しなさい。付録２のワークシートを使いなさい。

b　また，もともとの１日のスケジュール（８：00から12：00までと13：00から17：00まで）についての労働者の生産力を計算しなさい。計算結果を与えるだけでなく，付録２のワークシートを使って説明しなさい。

c　もし合計１時間の長さの休憩を（すべてが同じ長さである）いくつかの短い休憩に分けたとすると生産力が向上するかどうか調べなさい。どこにそれらの休憩を入れるか，またその場合最大の生産力が得られるのはどこか考えなさい。

課題３

多くの労働者は可能な限り，（続いた）自由時間があることを好む。つまり例えば余分な（半日の）休暇や，すべての勤務日の労働時間がより短いということである。それが可能でないのならば，多くの労働者が長い休憩を好むであろう。

会社の重役会議ではすべての勤務，配属計画に賛成し，労働者が少なくとも週19200 wpu の生産力を発揮できるようにスケジュールを提供する。工場は７：30から18：30まで開いている。

・週４日間働きたい人に対してこれが可能かどうか調べなさい。
・週５日間働く労働者にとって魅力的な選択を調べなさい。

すべての選択に対して一日のスケジュールを与えなさい，そしてまた付録３にあるワークシートの一つにそれらを図式的に表しなさい。

最終課題

もちろん労働時間のルールを決めるのは雇い主だけではない。一日のスケジュールのあらゆる種類の限界を決めた「健康と安全上のルール」もある。これらのルールも労働者を守っているのだ！次のページに会社に適合する健康と安全上のルールのうちいくつかを示した。

重役会議はできる限り高い生産力を望んでいる。労働者はできる限り長い

自由時間を望んでいる。

労働者のための一日のスケジュールについて，少なくとも２つのよく考えられた提案をしなさい。そしてそれは労働組合と重役会議がともに選ぶことができるものでなくてはならない。次のことを考慮に入れなさい。

・被雇用者と雇用者（労働者）の両方に魅力的であること。

・健康と安全上のルール。

・週当たり最低 19200 wpu を確保すること。

労働時間と１日のスケジュールをあげなさい。また，それらによって到達できる生産力の段階を決めなさい。すべての場合において，あなたの提案を補強するためにグラフを使いなさい。また，取り入れた考え，利点，不利な点のすべてを述べなさい。そして，使われている基準について明確な動機を与えることを注意しなさい。

「健康と安全上のルール」

休憩：仕事のある日には

・５時間30分以上働いたら，少なくとも30分以上の休憩を取る。

・８時間以上働いたら，少なくとも45分以上の休憩を取る。その休憩は30分以上続いたものでなくてはならない。

・10時間以上働いたら，少なくとも60分以上の休憩を取る。その休憩は30分以上続いたものでなくてはならない。

数学 A-lympiad の課題は，CITO テストの限界を超えて，現実感のある社会的課題を協働的に探求する機会を与えているよう思われる。ここで取り上げたような問題は，労働者の過密労働の問題や，雇用者と労働者間の労使協定の在り方など，現実に起こりえて，解決が一意に定まらない課題である。また，こうした課題に取り組む際には，初等的な数学をうまく活用する能力が必要とされる。かくして，オランダでは，現実感のある課題に十分な時間をかけて協働で取り組み，レポートを作成する機会を提供することにより，高次の数学的な思考力を評価しようとしている。なお，オランダでは，数学 A-lympiad の他に，数学Ｂの履修者むけのコンテストとして「Math B-day」（大谷・國次，2008）がある。さらに，小学校では，「Arithmetic Day」というコンテストもある。このように，全ての

児童・生徒が，現実感のある数学的な課題解決に協働で取り組む機会が提供されている。

7．おわりに

本稿では，オランダの数学教育の特徴を，RME 理論の原理，教育制度からみた RME の開発，教科書における教材例，CITO の全国テスト問題，そして探求的・協働的な数学コンテストの一端を紹介した。

本稿で紹介したオランダにおけるRME 理論と実践の一端から，わが国の数学教育に関していくかの示唆がえられると考える。

第一に，オランダの RME では，概念的数学化と応用的数学化のバランスが重視されており，教科書でも明確に反映されている。本論では，後期中等教育段階における大学準備教育コースの数学Ｂの教科書の対数の一例を示すにとどまったが，このことは初等学校と他の中等教育学校において基本的にあてはまっている。わが国の高等学校の教科書ででは，対数が指数の逆関係として数学的に定義され，対数の性質が数学的に証明され，最後に対数を応用する場面が取り上げられる。この意味で，わが国の高校数学ではオランダに比べて概念的数学化があまり強調されていないことがうかがわれる。

第二に，オランダの学校制度は中等教育段階から複線型をなしており，上部構造においては将来の進路や職業に配慮した数学の内容が開発されている。また，評価問題も現実感のある課題を短答式のテストやレポート形式の記述まで多元的な評価を行っている。思考力・判断力・表現力等を評価するためのパフォーマンス課題やポートフォリオ評価の在り方に関して，オランダから学ぶことが多くあるように思われる。

第三に，わが国では RME 理論としては創発的モデル化に主たる関心が向けられている。他方で，フロイデンタール研究所で開発されてきた Proeve や TAL は中間的な学習-教授軌道の理論を示しており，これまであまり注目されてこなかったものである。他方で，Prouve も TAL も，初等学校段階が主であり，中等教育段階も視野にいれた開発についてその進捗状況をフォローするとともに，教科書等にどのように反映されているのかを検討することから数学の教材の系統と教授理論についての貴重な示唆がえられると思われる。

※本稿は，大谷（2013a, 2013b），大谷・國次（2008），瀬沼・大谷・辰野（2008）を再編集したものである。

註

（1） オランダ語では，Realistisch Reken/Wiskundeonderwijs。Reken は算数を，Wiskunde は中等教育以降の数学を意味する。オランダの RME 研究の多くは英語で利用できる。

（2） 2015年９月，FIUS に於いて「第５回国際 RME 会議」が Using realistic contexts and emergent models to develop mathematical reasoning（数学的推論を育むために現実感のある文脈と創発的モデルを利用すること）なる主題で開催された。

（3） ファン・デン・ヒューヴェルによれば，realistic には２つの側面があり，一つは数学が日常生活や実社会における事象を組織化する上で有用であること，もう一つは問題場面が児童・生徒にとって現実感を持ち，「イメージする」（zich realiseren）ことができることである（van den Heuvel-Panhuizen, 2001: 3）。例えば，児童・生徒が，それが現実感を持てるならば，例えば『ガリバー旅行記』のお伽話などの架空世界や数学の形式的世界でもよい（Treffers, 1986）。

引用・参考文献

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordreht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1987). Mathematics starting and staying in reality. In Wirszup, I. (ed.), *Developments in school mathematics education around the world:* Proceeding of UCSMP International Conference on Mathematics Education (pp. 279-294). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (1991). Mediating between concrete and abstract. In Nunes, T. & Bryant, P. (eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). Hove: Psychology Press.

Haan, D. de & Wijers M. (eds.), (2000). *10 years of Mathematics A-lympiad: the real world mathematics team competition.* Freudenthal Institute, Utrecht University.

伊藤伸也（2009）. OECD-PISA の「数学的リテラシー」評価枠組みの背景：H.フロイデンタールの数学教授論との関わりから．*科学教育研究*33巻４号，321－329頁．

伊藤伸也（2007a）. H.フロイデンタールの数学観とその背景：人間の活動としての数学の検討を中心に．*筑波数学教育研究*26巻，47－56頁．

伊藤伸也（2007b）. H.フロイデンタールの数学教授学における「数学化」の意味．*日本科学教育学会 研究会研究報告*21巻６号，59－64頁．

Lange, J. de (1987). *Mathematics insight and meaning.* Utrecth: Rijkuniversiteit.

Mark, C. L. J & Goede, H. R, (2002). *VWO wiskunde A examenbundle 2002/2003.* ThiemeMeulenhoff, Utrecht /Zutpuen.

Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen (OCenW), (2004). *Voorstel Herziene Kerndoelen*

Basisonderwijs. Den Haag: OcenW.

大谷　実（2013a）．オランダの数学科教科書等におけるPISA型活用力育成のための内容分析，*中研紀要教科書フォーラム*，No. 11，30－41頁．中央教育研究所．

大谷　実（2013b）．オランダ，*理数科教科書に関する国際比較調査結果報告書*，教科書研究センター．

大谷　実（2010）．オランダの算数・数学教科書，*日本数学教育学会誌・算数教育*，92(8)，24–27，.

大谷実・國次太郎（2008）．オランダにおける「数学 A-lympiad」及び「数学 B-Day」の現地調査：Scala College での取り組みと生徒のレポートの考察．日本数学教育学会誌・数学教育，90 (1)，pp. 42－51．

リヒテルズ直子（2004）．*オランダの教育：多様性が一人ひとりの子供を育てる*．平凡社.

瀬沼花子・大谷実（2005）．算数・数学教育における創造性の育成に関する国際比較．科学教育研究，29巻２号，89－98.

瀬沼花子・大谷実・辰野真夕（2008）．オランダにおける文科系高校生のための「数学-Alympiad」の背景と実際．*日本数学教育学会誌・数学教育*，90 (1)，pp. 42－51．

Stolwijk, R. (2008. 11). *Mathematics education and exams in the Netherlands.* Cito Institut voor Toestontwikkelung. Arnhem, Cito.

Treffers, A. (1986). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project.* Dordrecht: D. Reidel.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980–1990. In L. Streefland (ed.). *Realistic mathematics education in primary school: On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (pp.11-20). Utrecht: CD- β Press.

Treffers, A., de Moor, E., Feijs, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I.* Overzicht einddoelen. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., de Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., Streefland L., de Moor, E. (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.* Deel 3A. Breuken. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., Streefland, L., de Moor, E. (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B.* Kommagetallen. Tilburg: Zwijsen.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). *Realistic mathematics education as work in progress.* In F. L. Lin (ed). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Eduation,* pp. 1–43. Taipei, Taiwan.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM,* 37 (4), pp. 287–307.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2001). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University/SLO.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Buys, K. (Eds.) (2005). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower gades in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute/SLO.

van der Kooij, H. et.al., (2003, 2004). *TWIN: Beroepsgerichte Wiskunde.* Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.

van der Kooij, H. (2010). Mathematics at work. In Pinto, M. & Kawasaki, T. (Eds.). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* pp.121–124. Belo Horizonte, Brazil.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E. & Keizer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5, and 6.* Rotterdam: Sense Publiser.

Wisconsin Center for Educational Research & Freudenthal Institute (eds.), (2006). *Mathematics in Context.* Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc.