

筑波大学審査学位論文（博士）

論文題目：

学校数学における証明活動の方法に関する研究

— argumentation を視点として —

人間総合科学研究科学校教育学専攻

氏名： 辻山 洋介 （千葉大学教育学部）

## 要約

### 1. 問題の所在と研究の目的

学校数学における証明の学習指導では、証明を生成する力を育成するとともに、証明を活用しようとする態度を養うことが意図されている。しかし、大規模調査の結果をみる限り、証明に関する学習状況は望ましいとはいえない。

このような状況の根底にある課題として、証明指導が論理や形式に偏重し、硬直した証明観をもとに行われていることが指摘されている。具体的には、数学の研究において、数学者は論理や形式を重視するだけではなく、非形式的かつ社会的な活動として証明に取り組んでおり、その活動が研究の発展につながっている。他方、学校数学における証明指導においては、生徒には、できあがった証明の結果を受容することや、それと同一のものを直ちに生成することが意図されており、両者の間に乖離があるという認識である (Balacheff, 1988b ; Hanna, 1989)。

この認識をもとに、生成される結果である「証明 (proof)」を中心に展開されてきた従来の研究に対して、「証明活動 (proving)」という考えが導入され、証明に関する生徒の活動がより広い視点から分析されるようになった。本研究は、この研究動向をもとに、証明観を広げることによって学習指導を改善することを目指し、証明活動を理論的に考察する。

その考察の視点として、“argumentation”に着目する。簡単に述べれば、argumentation は、蓋然的であっても論を立てたり、論の妥当性や価値を評価し合ったりする営みである。論は、広い意味での論理に基づく正当化であり、視覚的な情報や例を用いた正当化や、不確かさや飛躍のある正当化を含む。それゆえ、argumentation を視点とすることにより、不確かさや飛躍のある論の中でもどのような蓋然的な論をどのような状況において生かすことができるのか、すなわち証明活動の方法を分析することが可能になる。

先行研究において、近年、Toulmin (1958/2003) の「論のレイアウト」を援用した研究が多く行われ、実際の証明活動における推論やその連鎖の構造が分析されている。その反面、多くの研究は、「論のレイアウト」の構成要素の中でも「データ」、「論拠」、「主張」のみを用いており、蓋然的な論に特徴的な「反証」、「様相限定子」、「裏付け」を用いていない。

また、各要素に対応する行為がどのような状況において機能するのかは分析に反映していない。したがって、証明活動の方法に関する理論的な考察には至っていない。

Toulmin の研究に立ち返ると、その意図は、論理の形式に偏重した「形式的論理学」を批判し、人が実際に論理を用いる行為に焦点を当てた論理学を構築することにあつた。そして、実際の行為においては蓋然性が問題となることに着目し、蓋然的であっても論を立てたり評価したりする際に、論理がどのように機能するのかを考察したのである。

したがって、本研究は、「論のレイアウト」のすべての要素と各要素の機能に着目した上で、「論のレイアウト」を含む Toulmin の研究を援用することにより、証明活動の方法を理論的に考察する。この考察により、蓋然性に着目して証明観を広げるとともに、学習指導の改善に寄与することができると考えられる。

以上から、本研究は、argumentation を視点として、学校数学における証明活動の方法を理論的に明らかにし、証明活動の学習指導を改善する指針を得ることを目的とする。

## 2. 研究課題と研究方法

前述の目的を達成するために、本研究は二つの研究課題を設定し、これらの研究課題を文献解釈と概念分析を中心とした理論的考察によって解決する。研究課題 1 は、証明活動の方法を考察する視点として、Toulmin の研究を援用する必要性を明らかにすることである。研究課題 2 は、Toulmin に依拠して argumentation の特性を捉え、その特性を視点として証明活動の方法を理論的に考察することである。

## 3. 研究の概要

まず第 1 章において、証明に関する学習指導の課題を確認した上で、先行研究の背景、展開、成果、課題を整理し、前述の研究課題を設定する必要性を指摘した。

研究課題 1 に対しては、まず第 2 章第 1 節において、証明活動に関する研究の背景を確認した上で、証明活動の概念を規定した。具体的には、社会的な状況における証明の位置付け、証明の活用、事柄の真偽に関する疑いの解消という側面から、証明活動を「ある事柄の真偽に関する疑いを取り除きながら、事柄の真であることを示すために、証明を生成し、その証明を社会的な状況において検討する活動」と規定した。そして、証明の構想、証明の構成、証明の振り返りという三つの相から証明活動を捉える必要性を確認した上で、先行研究の整理をもとに各相を規定した。

次に、第2章第2節において、Toulminの研究の背景と特徴を確認した上で、蓋然性に関する Toulmin の研究を解釈することにより、argumentation の目的、その目的においてとる行為、目的と行為にかかわる他者性という側面から、argumentation を「他者と相互作用しながら、蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること、並びに文脈に即して論を評価することにより、主張を正当化すること」と規定した。

そして、第2章第3節において、証明活動の方法の考察における argumentation の意義を考察した。具体的には、まず、証明活動と argumentation の概念を相ごとに対応付け、証明活動の各相における argumentation の意味を同定した。そして、argumentation を視点とすることによって以下のことが可能になることを指摘した上で、その必要性を、他の先行研究との比較によって明らかにした。

- ・証明の構想において、事柄の真偽が不明であっても「真であるとみる」過程と、利用可能であると予想した要素や要素間の関連を、実際に利用可能であるかは不明であっても、擁護しながら提示する過程とを顕在化することが可能になる。
- ・証明の構成において、要素や要素間の関連を、利用可能性を吟味しながら組織化する過程と、未証明の事柄を根拠として用い、その事柄を新たな証明問題とする過程とを顕在化することが可能になる。
- ・証明の振り返りにおいて、他者と実際に相互作用しながら、事柄と証明の蓋然性を検討する過程と、利用可能でなかった要素や要素間の関連を、新たな事柄の探究のために利用する可能性を吟味する過程とを顕在化することが可能になる。

研究課題2に対しては、まず第3章第1節において、Toulmin の研究を、argumentation において直面する状況と、その状況において必要な行為とに着目しながら具体的に解釈することにより、argumentation の特性を抽出した。具体的には、論の「場に依存する」性質に関する Toulmin の言及をもとに、論の評価の特性として「タイプに応じた蓋然性の評価」を抽出した。そして、「場に依存せず不変」な構造である「論のレイアウト」に関する言及をもとに、立論の特性として「入手可能な要素の利用」、「蓋然性の度合いの明示」、「例外や条件の明示」、「論拠の暫定性の明示」を、論の評価の特性として「要素の付加と棄却」、「蓋然性の度合いの付加」、「例外や条件の付加」、「論拠の裏付けの付加」を抽出した。

次に、第3章第2節において、argumentation の各特性に基づいて、証明活動の各相における状況と行為を理論的に特徴付けた。具体的には、証明の構想を立論の四つの特性に基

づいて特徴付け、証明の構成と証明の振り返りを論の評価の五つの特性に基づいて特徴付けた。

そして、第4章において、特徴付けられた個々の状況と行為を、証明活動の相同士の関係をもとに捉え直し、証明活動の方法を導出した。具体的には、まず、上述の特徴付けをもとに、証明活動において直面する状況と、その状況において必要な行為を取り上げ、次に、その状況が生じる前提と、その行為によって生じる新たな状況を考察し、そして、はじめに取り上げた状況と行為の意味を捉え直した。この考察を各特徴付けについて行った結果、証明の構想の方法として「不確実な要素を用いた立論」、「不確実な箇所を明示した立論」、「利用可能な場合を明示した立論」、「不確実な論拠を前提とした立論」を、証明の構成の方法として「偽である事柄における論の利用による他の事柄の発見」、「要素の付加による論の組織化」、「要素の棄却と利用による論の組織化」、「条件の特定と利用による論の組織化」、「論拠の真偽の追究と利用による論の組織化」を、証明の振り返りの方法として「参照物の変更による事柄の真偽の追究」、「偽である事柄における論と真である事柄における証明との比較検討」、「棄却された要素と証明に用いられた要素との比較検討」、「結論を一般に示せない論と証明との比較検討」、「認められない論拠と認められた論拠との比較検討」を導出した。

以上をもとに、第5章において、証明活動の学習指導への示唆を導出した。具体的には、まず、上述の証明活動の方法の中でも、**Toulmin** を援用した特徴が顕著である方法として、「不確実な箇所を明示した立論」、「不確実な論拠を前提とした立論」、「条件の特定と利用による論の組織化」、「参照物の変更による事柄の真偽の追究」を選定した。そして、各方法における状況と行為の関係をもとに、状況の設定と行為の促進に関する手立てを考察し、学習指導への示唆を導出した。

## 資料 1 : 主要引用・参考文献

- Balacheff, N. (1988b). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world: Applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students Vol. 2* (pp. 284-298). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Balacheff, N. (1991a). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. V. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Garuti, R., Boero, P., Lemut, L., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.2* (pp. 113-120), Valencia, Spain: PME.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9, 20-23.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 427-441.
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2006a). 特定の課題に関する調査 (算数・数学) 調査結果 (小学校・中学校). <http://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/04002030200004000.pdf> (2016 年 1 月 8 日閲覧)
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 385-400.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (second edition)*. New Jersey, NJ: Princeton University Press. (Original work published 1957)
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument (updated edition)*. Cambridge: Cambridge University Press. (Original work published 1958)

## 資料 2 : 章構成

### 序章 研究の目的と方法

#### 第 1 節 問題の所在と研究の目的

#### 第 2 節 研究課題と研究方法

#### 第 3 節 本論文の構成

### 第 1 章 学校数学における証明活動の方法に関する研究の成果と課題

#### 第 1 節 証明活動の方法に着目する実践的な背景

#### 第 2 節 argumentation に着目した証明活動の研究の成果と課題

### 第 2 章 証明活動の方法の考察における argumentation の意義

#### 第 1 節 証明活動とその相

#### 第 2 節 Toulmin の研究にみる argumentation の意味

#### 第 3 節 証明活動の方法の考察における argumentation の意義

### 第 3 章 argumentation の特性に基づく証明活動の相の特徴付け

#### 第 1 節 argumentation の特性の同定

#### 第 2 節 argumentation の特性に基づく証明活動の相の特徴付け

### 第 4 章 argumentation を視点とした証明活動の方法の考察

#### 第 1 節 証明の構想の方法

#### 第 2 節 証明の構成の方法

#### 第 3 節 証明の振り返りの方法

### 第 5 章 証明活動の学習指導への示唆

#### 第 1 節 証明の構想の方法に着目した学習指導

#### 第 2 節 証明の構成の方法に着目した学習指導

#### 第 3 節 証明の振り返りの方法に着目した学習指導

### 終章 研究の総括と今後の課題

#### 第 1 節 研究の成果

#### 第 2 節 研究の意義

#### 第 3 節 今後の課題

### 資料 3 : 証明活動の方法

表 1 証明の構想の方法

方法	直面する状況	状況において必要な行為
不確実な要素を用いた立論	事柄が実際に真であるかどうかは不明であっても、真であろうと予想した状況	事柄の結論が成立するとみて、結論を主張として導くために利用可能なデータと論拠など、不確実さや飛躍があるかもしれない要素を予想し、それらを用いて論を立てること
不確実な箇所を明示した立論	予想した要素の不確実さや飛躍を十分に解消できなくとも、要素を利用できそうであると判断した状況	不確実さや飛躍のある箇所を明示し、不確実さや飛躍を解消できるという想定の下で論を立てることにより、要素の利用可能性を追究すること
利用可能な場合を明示した立論	予想した要素を用いて事柄の結論を一般に示せるかどうかは不明であっても、例外や条件を除いた範囲においては示せそうであると判断した状況	要素を利用できそうな場合や条件を明示し、その場合や条件の下で論を立てることにより、要素の利用可能性を追究すること
不確実な論拠を前提とした立論	予想した要素における論拠が認められるかどうかは不明であっても、暫定的には認められそうであると判断した状況	暫定的な論拠の不確実さを明示し、その論拠が認められるという前提の下で論を立てることにより、要素の利用可能性を追究すること

表 2 証明の構成の方法

方法	直面する状況	状況において必要な行為
偽である事柄における論の利用による他の事柄の発見	論の不確実さや飛躍を解消できないこと、かつ事柄が偽であることが疑われた状況	可能な範囲で組織化した論を利用し、タイプに応じて事柄を評価することにより、事柄の偽であることを示し、真である他の事柄を得るために付加する条件を探ること
要素の付加による論の組織化	論の不確実さや飛躍が疑われたが、要素を付加すれば不確実さや飛躍を解消できそうであると判断した状況	論において不確実さや飛躍のある箇所がどの要素や要素間の関連なのかを特定し、不確実なデータや主張が成立することを示す要素を付加することや、飛躍のある論に要素を付加することにより、不確実さや飛躍を解消し、論を証明へと組織化すること
要素の棄却と利用による論の組織化	論の不確実さや飛躍を解消できないことが疑われたが、事柄が真であろうという予想に変わりはない状況	不確実さや飛躍を解消できない要素を棄却し、その要素を含む論を利用しながら別の要素を探り、論を証明へと組織化すること
条件の特定と利用による論の組織化	論を用いて、事柄の仮定において結論を一般に示せないことが疑われた状況	論が成立する条件を特定し、その条件の下で成立する論を利用しながら、論を証明へと組織化すること
論拠の真偽の追究と利用による論の組織化	論に含まれる論拠が認められていないことが疑われた状況	論拠の真偽を追究し、タイプに応じた論拠の裏付けを付加することにより、論を証明へと組織化すること



表3 証明の振り返りの方法

方法	直面する状況	各状況において必要な行為
参照物の変更による事柄の真偽の追究	証明に含まれるデータや主張が、特定の図や数の例を参照したものであり、事柄の仮定において結論が成立することを一般に示しているかどうか疑われた状況	参照物を変更し、変更された参照物に即して、事柄と証明の蓋然性を他者と相互作用しながら検討すること
偽である事柄における論と真である事柄における証明との比較検討	偽である事柄における論と、真である事柄における証明とを得ている状況	その論と証明を他者と相互作用しながら比較検討することにより、偽である事柄の仮定において成立する結論や、偽である事柄の結論を導く仮定を探究すること
棄却された要素と証明に用いられた要素との比較検討	棄却された要素と、証明に用いられた別の要素とを得ている状況	その要素が棄却された理由と、その別の要素が証明に用いられた理由とを他者と相互作用しながら比較検討することにより、事柄が真である理由を追究すること
結論を一般に示せない論と証明との比較検討	付加された条件においてのみ結論を示すことができる論と、証明とを得ている状況	論と証明を他者と相互作用しながら比較検討することにより、その条件において成立する他の事柄や、仮定において一般に成立する他の事柄を探究すること
認められない論拠と認められた論拠との比較検討	実際には認められなかった論拠と、その論拠が認められるならば成立する論とを得ている状況	他者と相互作用しながら、認められなかった論拠が認められるための条件を付加することと、その条件を論に付加することにより、新たな事柄を探究すること