

67. 格子状交通ネットワークモデルにおける移動経路と流動交差量の分布について

Route Crossing in a Network Model on Various Routing Systems

三浦 英俊*・鈴木 勉**
Hidetoshi Miura*, Tsutomu Suzuki**

Given a road network laid out in a square grid pattern and a set of origin-destination pairs, various routes of the same length may be considered. Vehicles entering into road intersections have to stop or reduce speed for safety. These vehicle behaviors are modeled as "traffic flow crossing" in this study. We construct a theoretical model to treat spatial distributions of traffic flow crossings in a road network given by an $n \times n$ square grid with uniform demand for each node pair, and show the dependency of the result on routing strategies. First, we derive traffic flow and crossing in the road network, and compare routing by random choice, single left-turning, and turning-point remote from center under the constraint that these strategies have the same average internal travel length. The third one gives the least value of the traffic flow crossing in the three routing rules. Second, we create a mathematical programming model to minimize the overall amount of crossings. We find that the minimum values of the amount of crossings are smaller than 85 - 98 % of the turning-point remote from center routing.

Keywords: grid pattern traffic network, route crossing, route choice

格子状交通網, 流動の交差, 経路選択

1. はじめに

都市内の交通流動を効率よく制御し、流動の錯綜や滞留、これらに伴う事故などの問題を軽減することは、古くからの都市計画の課題であり、幅広い分野の理論的・実証的研究がある。なかでも都市に発生する流動の量とそれらの交差を把握するための理論的研究については、矩形や円形の都市を対象に多くの研究結果が得られている。

腰塚¹⁾は道路の交差点密度と道路延長密度の間の一定の関係を明らかにし、鈴木・佐藤²⁾はこの関係を東京区部の道路網で検証している。腰塚・今井³⁾、腰塚⁴⁾は、交差点密度と移動時間やエネルギーとの関係を論じて望ましい交差点密度の存在を示した。

流動同士の交差の解析については、Vaughan⁵⁾に Holroyd⁶⁾らの研究が紹介されている。流動の錯綜や滞留は、移動の経路選択に大きく依存する。Holroyd and Miller⁷⁾や Holroyd⁸⁾は放射環状交通モデルを用いて、また Holroyd⁹⁾は格子状交通モデルを用いて、それぞれ典型的ないくつかの経路選択ルールを与えて交差の総量を比較分析している。鈴木・三浦⁵⁾は格子状交通網と放射環状交通網の流動量の密度分布と交差の密度分布を求めた。

流動の交差に関するこれら既往研究は、地域内どこでも移動可能で移動方向が限定される稠密な交通網モデルを用いて論じられている。しかし、ネットワークモデルを用いた流動の交差の研究はまだ見当たらない。ネットワークモデルを用いた交差の解析は、流動がリンク上に限られるため、結果を実際の道路網における交通量データなどと比較検討することが稠密な交通網モデルよりも容易となる。また、地域内流動を円滑に処理できる経路選択ルールがネットワークモデルを用いて得られたとすれば、それは実際の道路網における有益な示唆となるだろう。

本研究の目的は、稠密な交通網モデルを用いた流動の交差の解析をネットワークモデルにおける解析へ拡張することである。この拡張によって、ネットワークモデルにおける経路選択と流動の交差との関係を理論的に議論する枠組みを構築したい。

本研究では、稠密な交通網における流動の交差の定義を拡張して、有向リンクで構成される格子状交通網を持つ正方形都市モデルにおいて、交差点において直交する2つのリンクから流入する流動量の積を用いて流動交差量を計算する。経路選択ルールと交通網規模を変化させて、リンクを通過する流動量と交差点における流動の交差の量を求める。流動量と交差の量の都市モデル内の空間分布から、交通網の規模および経路選択が交差点における交差に与える影響について論じる。さらに数理計画問題を用いて都市全体の流動の交差量が最小となる経路選択を求めるとともに、外回り経路との比較を行う。

2章で使用する数理モデルについて説明する。3章では流動交差量について述べるとともにネットワーク交通網と稠密な交通網の関係について述べる。4章で都市全体の流動交差量を最小にする経路選択について考察する。

2. モデルについて

2.1 都市モデル

本研究で使用する都市モデルは、一辺の長さが1の正方形都市領域と格子状交通網によって構成される。都市領域を、領域の左下頂点が平面直角座標系の原点Oと一致して、横および縦の辺がそれぞれx軸・y軸と平行となるように配置する。 $n \times n$ 個のノードを、x座標・y座標ともに $1/(2n)$, $3/(2n)$, $5/(2n)$, ..., $(2n-1)/(2n)$ のいずれかとなるように間隔 $1/n$ で正方格子状に配置する。全てのノードを交差点とす

* 正会員・南山大学理工学部(Nanzan University)

**正会員・筑波大学システム情報系(University of Tsukuba)

る。正方格子において隣り合う全ての交差点間を往復の有向リンクで結び交通網を構成する。往復の向きを表す2本の有向リンクを合わせて「交通路」と呼ぶことにする。例として図1に $n=5$ の都市モデルを示す。

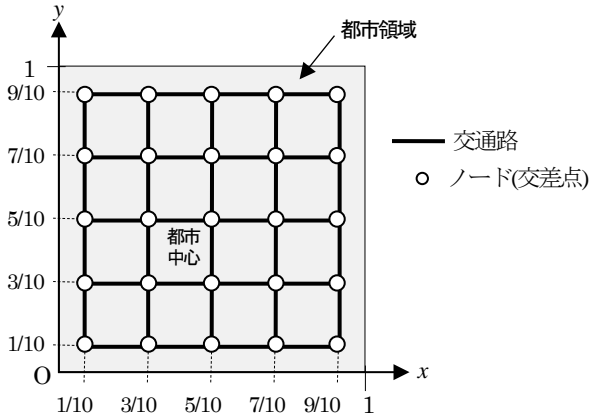


図1 格子状交通網 ($n=5$)

2.2 移動需要の発生

ノードすなわち交差点の集合を V 、リンクの集合を A とする。すべての移動需要はノードを起終点として発生し、ノードとリンクだけを通る。ノード r から s へ移動する移動需要量を q_{rs} とする。リンクまたは経路を単位として集計した移動需要を流動、その量を流動量と呼ぶことにする。起点と終点と同じ移動需要はどのリンクも通過せず、したがって流動として集計されない。ノード r から s へ移動する移動需要量 q_{rs} をノード間の距離に関わらず一定として

$$q_{rs} = \frac{1}{n^2(n^2-1)} (r, s \in V) \quad (1)$$

と与える。リンクを通る起終点ペアの総数は往復を考慮すると $n^2(n^2-1)$ となるので、(1)のように q_{rs} を与えると、全てのノードペア間で発生する移動需要は等しく、格子状交通路上を移動する移動需要総量は n の値に関わらず常に1となる。

2.3 経路選択とリンク流動量

格子状交通網では複数の最短経路がある。横に n_1 本分の交通路、縦に n_2 本分の交通路だけ離れたノード間の最短経路の本数は $(n_1+n_2)!(n_1!n_2!)$ である。全ての移動需要は最短経路から経路を選択することとして、経路流動量とリンク流動量を以下のように記述する。ノード r から s への最短経路本数を N_{rs} とする。 r から s への k 番目の最短経路を通る流動量を h_{rsk} とする。 h_{rsk} は

$$q_{rs} = \sum_{k=1}^{N_{rs}} h_{rsk} (r, s \in V) \quad (2)$$

を満たすものとする。 r から s への k 番目の経路がリンク α を通るかどうかを表すパラメータ $\delta_{rsk\alpha}$ を

$$\delta_{rsk\alpha} = \begin{cases} 1: \square\square\square r \text{ から } s \text{ への } k \text{ 番目の} \\ \text{経路がリンク } \alpha \text{ を通る} \\ 0: \text{その他} \end{cases} \begin{pmatrix} r, s \in V, \alpha \in A, \\ k = 1, \dots, N_{rs} \end{pmatrix} \quad (3)$$

とすると、リンク α を通る流動量 f_α は以下のように表すことができる。

$$f_\alpha = \sum_{r \in V} \sum_{s \in V} \sum_{k=1}^{N_{rs}} \delta_{rsk\alpha} h_{rsk} (\alpha \in A). \quad (4)$$

3. 交差点における流動交差量

稠密な格子状交通網モデルにおける流動の交差量の定義に基づいて、ネットワーク格子状交通網の流動の交差量を考える。

図1の一边の長さが1の正方形都市に、ネットワーク格子状交通網の代わりに稠密な格子状交通網を配置して、都市内がどこでも移動可能で移動方向が x 軸または y 軸方向に限定されているとしよう。座標 (x, y) における x 方向の微小長さの線分を通過する北向きの流動量を g_N 、南向きの流動量を g_S 、 y 方向の微小長さの線分を通過する東向きの流動量を g_E 、西向きの流動量を g_W とする。地点 (x, y) における交差密度 η はこれら4方向の流動量を南北と東西にそれぞれ集計した量の積で定義され、

$$\eta = (g_N + g_S)(g_E + g_W) \quad (5)$$

となる(鈴木・三浦⁵⁾)。

稠密交通網と同じようにネットワーク格子状交通網上において流動交差量を考える。ネットワーク格子状交通網では、流動の交差はノード(交差点)で発生・終了する。交通路上の移動は、交差点進入時に、直進、左折または右折、移動終了、の3つのいずれかを行う。図2の矢印で示すノード r から s への経路は、途中5つの交差点に進入し、順に直進、直進、右折、直進、移動終了を行っている例を示す。交差点で直交するリンクの流動同士はこれら3つの行動を行うとき交差すると考える。交差点 v に入る有向リンク α と β が直交するかどうかを表すパラメータ $b_{\alpha\beta v}$ を、

$$b_{\alpha\beta v} = \begin{cases} 1: \text{交差点 } v \text{ に入る有向リンク} \\ \alpha \text{ と } \beta \text{ は直交する} \\ 0: \text{その他} \end{cases} (\alpha, \beta \in A, v \in V) \quad (6)$$

とする。さらに、リンク α 、 β の流動量をそれぞれ f_α 、 f_β として、これらと $b_{\alpha\beta v}$ の積を用いて交差点 v における流動の交差量 c_v を

$$c_v = \sum_{\alpha, \beta \in A} b_{\alpha\beta v} f_\alpha f_\beta (v \in V) \quad (7)$$

と定義する。

図3に流動交差量の計算例を示す。図3の十字路交差点はリンク1, 2, 3, 4が交差点 u に入る向きで接続してお

り, $b_{13u}=b_{14u}=b_{23u}=b_{24u}=1$, $b_{12u}=b_{34u}=0$ である. このときリンク i の交通流動量を f_i ($i=1, \dots, 4$) とすれば, $c_u=f_1f_3+f_1f_4+f_2f_3+f_2f_4=(f_1+f_2)(f_3+f_4)$ となる. また図 3 の T 字路の交差点 v における流動交差量を同様に計算すると $c_v=(f_1+f_2)f_3$ となる. ネットワーク格子状交通網を道路網とし, 移動の主体を自動車として, 現実の道路交通における流動交差量の意味するところを解釈してみる. 交差点に進入した自動車は, 直交する道路から進入する自動車と, (どちらかまたは両方の自動車が交通ルールを守らない場合に) この交差点で衝突する可能性がある. しかし自分と同じ向きや正面の道路からやって来る自動車と衝突する可能性は考慮しない. 流動交差量は, 交差点で直交して衝突する可能性のある自動車のペア数に相当する.

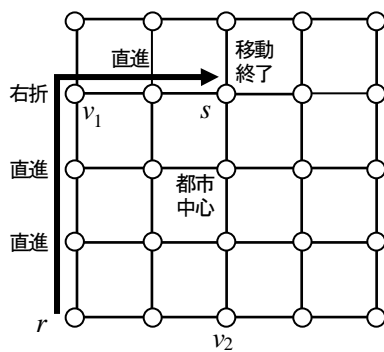


図 2 格子状交通網における経路の例

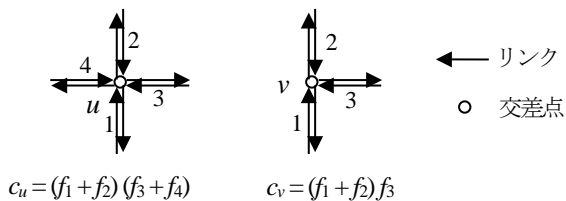


図 3 十字路(左)と T 字路(右)

4. 格子状交通網における交差量の分布

4.1 経路選択ルールと流動交差量

n によって格子状交通網の規模を定め, 交差点における流動交差量を求める. 全ての起終点について最短経路を列挙し, パラメータ $\delta_{nk\alpha}$ と $b_{\alpha\beta v}$ をあらかじめ決めておく. 次の 3 つの経路選択ルールを考える. 起終点間の経路選択によってリンクの流動量 f_{α} が変化し, 交差点の流動交差量 c_v も変化する.

均等利用: すべての起終点ペア r, s のすべての最短経路に均等の流動量を割り当てる. すなわち $h_{rk} = q_{rs} / N_{rs}$ とする.

右左折数最小経路: 右折や左折にはコストがかかると考えた場合, 右左折数になるべく少ない経路だけを考慮して交差量を求めることに意味があると考えられる. 起終点ペアの最短経路のうち曲がる回数が 1 回以下の経

路のみに均等に流動量を割り当てる.

外回り経路: 右左折数最小経路のうち, 都市中心との距離が最大となる経路を外回り経路と呼ぶ. 外回り経路を選択すれば都市中心からなるべく離れた経路を通ることになり, 中心部の交差量の低下が期待できる(鈴木・三浦⁵⁾). 外回り経路が複数ある場合は, それらの経路に均等に流動を割り当てる.

図 2 を用いて, ノード r から s へ移動する経路の例を示す. r から s への最短経路本数は $5!/(2!3!) = 10$ である. 均等利用ルールの場合 $h_{rk} = q_{rs} / 10$ ($k=1, \dots, 10$) となる. 10 本の最短経路のうち交差点 v_1 で右折する経路と v_2 で左折する経路は右左折数最小経路である. 右左折数最小経路ルールにおいてはこれら 2 経路に流動量 q_{rs} を半分ずつ割り当てる. r から s への 2 つの右左折数最小経路の都市中心との距離は, v_1 を右折する経路が 0.2 であり, v_2 を左折する経路が 0 である. したがって v_2 を左折する経路が外回り経路となる.

図 4 に 3 つの経路選択ルールについて, リンク流動量と流動交差量の空間分布を示す. 上から 3 つは $n=5$ について, 一番下は $n=4$ の外回り経路を示す. 図中の線の太さはリンク流動量を, 数値は交差点の流動交差量を表す. ただし交通路を構成する往復の向きのリンクを流れる流動量は同じとなるので, 1 本のリンクだけを表示した. また, 交差点の流動交差量の数値が小さいため見やすさのために 10^4 倍した数値を図中表記した. 全ての交差点の流動交差量合計を流動交差総量 C と呼び, 経路選択ルールごとの C の値を比較する.

以下, 経路選択ルールごとに図 4 から読み取れる結果について述べる.

- 均等利用: 中心部に近いほどリンク流動量と交差点の流動交差量が多い.
- 右左折数最小経路: 均等利用と同様の傾向が見られるが, 中心付近の流動量と流動交差量は均等利用より低く, 外周のリンクの流動量がやや高くなった. 均等利用と比較して中心交差点の交差量は 6 割程度, 流動交差総量は約 83% である.
- 外回り経路: 都市中心を取り囲むように環状路を形成するリンクの流動量が多く, 流動交差量が最大となる交差点を含んでいる. 外周を形成するリンクの流動量が最も多い. 都市中心の交差点の流動交差が最も小さい. 格子状交通網を放射環状交通網に見立ててみると, 外回り経路のリンク流動量の空間分布は都市全体の交差量を低下させるために環状路の果たす役割が重要であることを示唆している. 一方で放射路に相当する中心の交差点を十字につらぬくリンクの流動量は全て 0.02 未満となっており, 外回り経路のときに放射路の役割は小さいと言える. 外回り経路の流動交差総量は, 3 つの経路選択ルールのうち最小である.

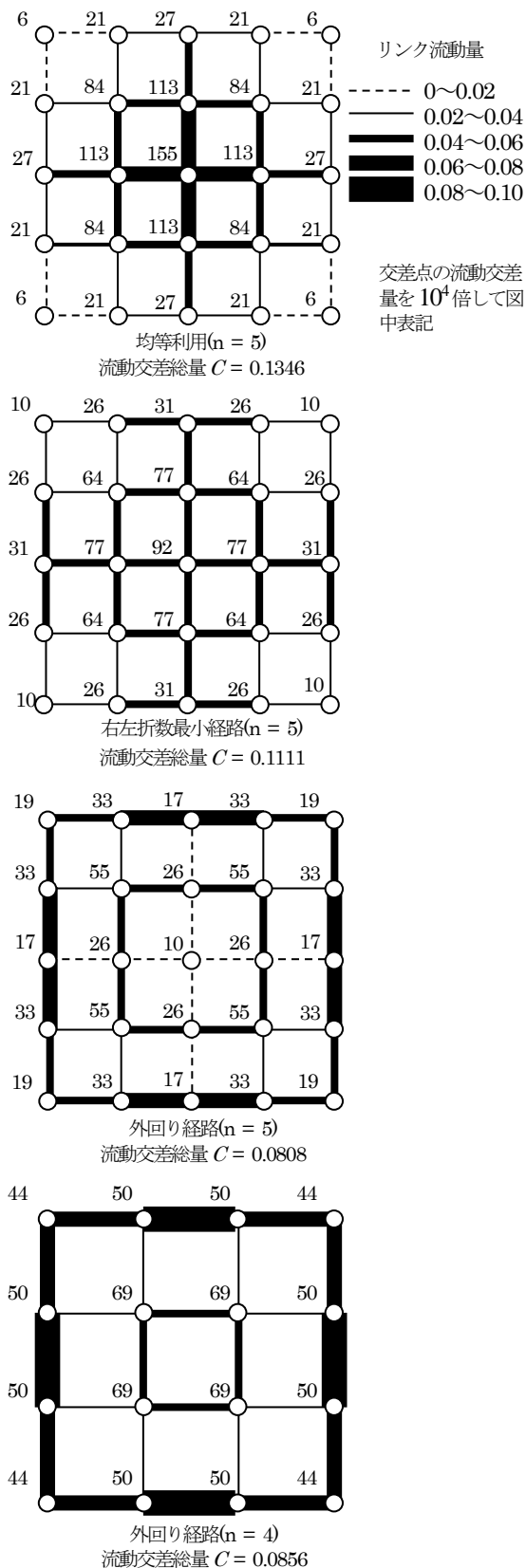


図 4 格子状交通網の流動量と流動交差量

n の偶奇によって外回り経路の流動交差量の空間分布に違いがあるかどうかを見るために、図 4 の一番下に $n = 4$ のときの外回り経路を示す。 n が偶数のときは都市の中心点が交差点とならず、都市中心をつらぬく交通路がなくなるわけだが、 $n = 5$ の場合と比較すると、リンク流動量と流動交差量の空間分布の傾向はほとんど変わらない。都市全体の流動交差総量 C は $n = 4$ のほうが大きい。

4.2 流動交差量最小経路

次に都市全体の流動交差総量を最小にする経路選択について考える。3 章で述べたように流動交差量は交差点で直交して衝突する可能性のある自動車のペア数に相当し、都市全体で交差点において直交する道路からの自動車同士の衝突の可能性をなるべく小さくする経路選択を求める問題となる。ノード r から s への k 番目の経路の流量 h_{rsk} を決定変数として、流動交差総量 C を最小にする数理計画問題

$$\min_{h_{rsk}} \quad C = \sum_{v \in V} c_v$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^{N_{rs}} h_{rsk} = q_{rs} = \frac{1}{n^2(n^2 - 1)} \quad (r, s \in V)$$

$$h_{rsk} \geq 0 \quad (r, s \in V, k = 1, \dots, N_{rs})$$

を解く。この数理計画問題は式(4)と式(7)から明らかなように二次計画問題となる。計算には、レノボ X1Carbon(CPU Intel Core i7-4600U, メモリ 8GB)と NTT データ数理システム社の数理計画ソフトウェア Numerical Optimizer Ver. 17.1.1 を使用した。

図 4 に示した 3 つの経路選択ルールと比較するため、図 5 に $n = 4, 5$ について、流動交差最小経路の時のリンク流量と流動交差量を示す。交通路を構成するリンクの流量は往復で異なるので、各リンクの下または右に付置した数値によって全てのリンク流量を表す。

流動交差総量 C の値は、 $n = 5$ のとき 0.0789 であり、右左折数最小経路の場合と比べて 71%、外回り経路と比べて 98% となる。外回り経路の場合との差は小さい。交差点の流動交差量、リンク流動量はともに都市中心にある交差点を中心としておおよそ点対称の分布となっており、外回り経路とよく似た分布である。中心部のリンク流動量が少なく、外周リンクの流動が多い。都市中心の交差点を取り囲むように構成される 8 本の交通路の流量は、時計回りの流量が反時計回りよりも多くなっている。交差点の流動交差量は、都市中心交差点の値が最小であり、外回り経路のときよりも小さい。 $n = 4$ の交通網については、流動交差総量は 0.0726 であり、右左折数最小経路と比べて 68%、外回り経路と比べて 85% の大きさである。中心部のリンク流動量が少なく、外周リンクの流動が多いという全体の傾向は $n = 5$ の場合と同じであるが、流動交差量とリンク流動量の分布は $n = 5$ の場合よりも対称性の崩れが大きい。

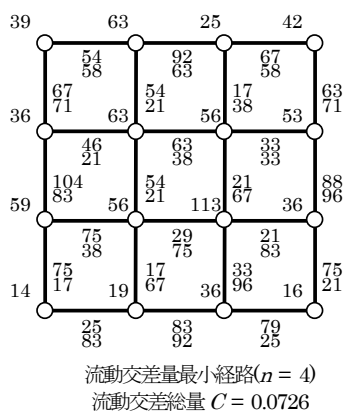
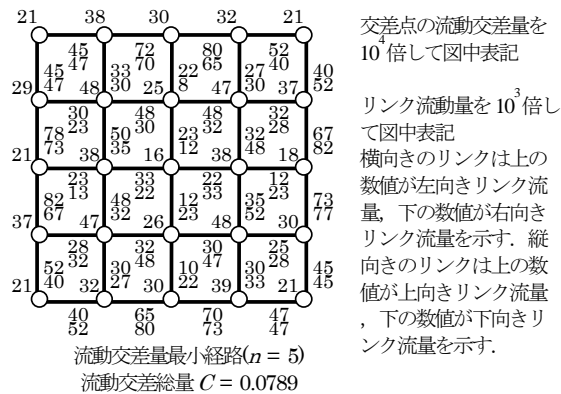


図5 流動交差量最小経路の流動量と流動交差量

4つの経路選択ルールのうち、外回り経路は、流動交差総量が流動交差量最小経路よりもわずかに大きいだけで、経路選択ルールは単純で分かりやすい。現実の交通経路選択に対する示唆として、目的地まで最短経路と同程度の経路が複数ある場合は、なるべく都心から遠い経路を選択することが都市全体の交通混雑の緩和につながることが推測される。ただし本研究のモデルは多くの現実のことがらを捨象しているので、この推測が正しいものかどうか、より現実に近い解析が必要なことはいうまでもない。

4.3 交通網の規模と流動交差量の関係

交通網の規模を表す n を変化させて、4つの経路選択ルールの都市全体の流動交差総量 C を比較する。ただし流動交差量最小経路については、使用した計算機の能力の限界から n が6以上の場合に解を求めることができなかったため、5つ目の経路選択ルールとして、選択できる経路を右左折数1回以下の経路に限定した「右左折数1回以下限定の流動交差量最小経路選択」を、代替として求めることとした。 $n=6$ のときすべての起終点ペア間の経路数すなわち数理計画問題の変数の数は13024であるが、右左折数1回以下に限定すれば2160に減少し、求解が容易となるのである。

表1に、外回り経路、流動交差量最小経路、右左折数1回以下限定の流動交差量最小経路の計算結果を示す。 $n=2, 3$ のときは3つの経路選択とも値が同じである。 n が4以上の時、流動交差量最小経路の流動交差総量は外回り経路と比較すると $n=4$ のとき84.8%、 $n=5$ のとき97.6%となった。 n が4または5の時、右左折数を1回限りにした場合との差は小さく、都市全体で交差の少ない経路選択を考える場合、右左折数を1回以下に限定しても流動交差総量はあまり変わらないことが分かった。

表1 外回り経路、流動交差量最小経路、右左折数1回以下限定の流動交差量最小経路についての流動交差総量 C (カッコ内は外回り経路の場合に対する比率)

n	外回り経路	流動交差量最小経路	右左折数1回以下限定の流動交差量最小経路
2	0.1111	0.1111 (100%)	0.1111 (100%)
3	0.0851	0.0851 (100%)	0.0851 (100%)
4	0.0856	0.0726 (84.8%)	0.0754 (88.0%)
5	0.0808	0.0789 (97.6%)	0.0790 (97.8%)
6	0.0809	求解できず ^{a)}	0.0784 (96.9%)

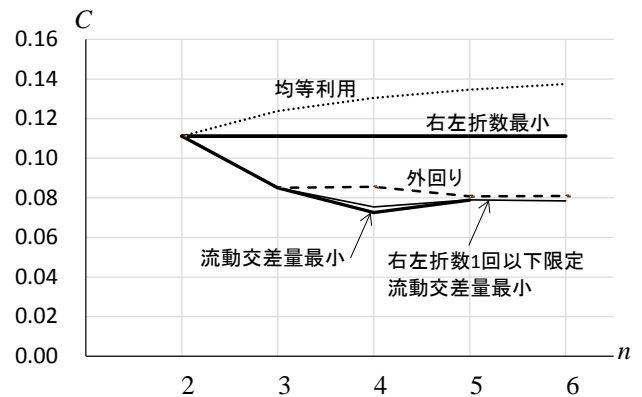


図6 交通網の規模と流動交差総量

図6は横軸に n をとり、縦軸に流動交差総量 C をとったグラフである。均等利用、右左折数最小、外回り、右左折数1回以下限定の流動交差量最小、流動交差量最小の順に C の値が小さくなる。ただし前述のとおり流動交差量最小経路の場合は $n=5$ までしか表示していない。外回り経路、流動交差量最小経路、右左折数1回以下限定の流動交差量最小経路についての流動交差総量 C の差は大きいものではないことが分かる。均等利用の流動交差総量が増加する理由は、2回以上右左折する経路を利用する流動が含まれているためである。均等利用では最大で $2n-3$ 回の右左折を行う経路に流動量が割り当てられるように、 n が増えると右左折回数が多い経路が増えるため都市全体の流動交

差量も増加する。右左折数最小経路については C が n および交通路総延長に依存せず一定で $0.1111 = 1/9$ となっている。この理由については次節で考察する。

4.4 ネットワーク交通路モデルと稠密交通路モデル

稠密交通網では、右左折数最小経路と外回り経路について流動交差総量が求められている。 n を限りなく大きくして、流動交差総量から見たネットワーク交通網の稠密交通網への接近について考察する。

まず、右左折数最小経路の場合の流動交差総量 C の値 $0.1111 = 1/9$ は、稠密交通路モデルにおける値と同じである。この理由について述べる。交通網の左から i 番目、下から j 番目の交差点に流入する北向き、南向き、東向き、西向きの流動量を $f_N(i, j)$, $f_S(i, j)$, $f_E(i, j)$, $f_W(i, j)$ とすると、南北方向と東西方向の流入量の和はそれぞれ、

$$f_N(i, j) + f_S(i, j) = \frac{2(n-j)(j-1) + (n-1)}{n(n^2-1)},$$

$$f_E(i, j) + f_W(i, j) = \frac{2(n-i)(i-1) + (n-1)}{n(n^2-1)},$$

となる ($i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$)。流動交差総量 C は

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_N(i, j) + f_S(i, j))(f_E(i, j) + f_W(i, j))$$

$$= \frac{1}{9} = 0.1111$$

となり、 C は n に依存しない定数となる。■

以上のことから、右左折数最小経路によって移動需要が移動する場合にネットワーク格子状交通網の流動交差総量は稠密交通網の値と一致することが明らかとなった。

外回り経路については、稠密交通網における流動交差総量は $1171/3780 = 0.0775$ と求められている(鈴木・三浦⁵⁾)。 n を限りなく大きくした時のネットワーク交通網については、計算における場合分けが複雑なため解析的に値が収束することを示すことはできないが、図 6 から 0.0775 に近づくことが予想される。

5. 結論と今後の課題

本研究では、ネットワーク格子状交通網をもつ都市モデルを用いて、リンク流動量と流動交差量の空間分布を導出して経路選択ルールの違いによるそれらの差違を分析した。ネットワーク上の移動需要は、ノード間で一様に移動が発生して交通需要の総量が 1 となるように与えた。以下のことが明らかとなった。

1. 右左折数最小経路ルールでは格子状交通網の規模に関わらず流動交差量が一定となる。
2. 外回り経路選択は、均等利用や右左折数最小経路と比べて都市全体の流動交差量が小さい。これは稠密な交通網における結果と同じであるが、ネットワーク交通網でも同様の結果が得られることを確かめることができた。流動交差量が都市全体で最小となる経路選択

を数理計画問題によって得た。このときの流動交差総量は $n=4$ のとき 0.0726 , $n=5$ のとき 0.0789 となり、それぞれ外回り経路の場合と比較して $n=4$ のとき 85% , $n=5$ のとき 98% の大きさとなった。

3. 右左折数を 1 回以下に限定して流動交差総量が最小となる経路選択を求めたところ、右左折数を限定しない場合と比べて都市全体の流動交差量の差は小さかった。

最後に今後の課題について述べる。外回り経路に関する結果は、現実の都市における経路選択において、目的地まで同程度の距離の経路が複数ある場合にはなるべく都心から遠い経路を選択することが、都市全体の混雑緩和に有効であることを示唆している。今後は、現実の道路網を用いて、経路選択と道路の流動交差量との関係を調べる解析を行う必要がある。都市内の移動需要の発生が一様でなく、例えば都市中心部への移動需要が多い場合など、実際の都市に近い場合を想定した場合についても考えたい。さらに、本研究では最短経路から経路を選択することで議論を展開したが、一定程度の迂回を許す場合には、都市全体の流動交差をもっと小さくできるだろう。

謝辞

多くの貴重なご意見をいただきました査読者に感謝いたします。

参考文献

- 1) 腰塚武志 (1979) 道路網と交差点, 都市計画, 103, 36-41.
- 2) 鈴木 勉・佐藤祥路 (2015) 道路延長密度と交差点密度, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会 アブストラクト集, 84-85.
- 3) 腰塚武志・今井和敏 (1991) 平均走行速度と信号密度, 日本都市計画学会学術研究論文集, 26, 547-552.
- 4) 腰塚武志 (1994) 走行時間や走行エネルギーを最小にする道路密度, 日本都市計画学会学術研究論文集, 29, 319-324.
- 5) 鈴木 勉・三浦 英俊 (2016) 都市内の移動経路と流動量密度・交差密度の空間分布, 都市計画論文集, 51(3), 909-914.
- 6) Vaughan, R. (1987) *Urban Spatial Traffic Patterns*, Pion.
- 7) Holroyd, E. M. and Miller, A. J. (1966) Route crossings in urban areas, Proceedings of 3rd Conference ARRB, 394-419, Australian Road Research Board, Sydney.
- 8) Holroyd, E. M. (1966) Theoretical average journey lengths in circular towns with various routeing systems. Road Research Laboratory Report, 43 (Ministry of Transport, UK, 1966).
- 9) Holroyd, E. M. (1968) Routing traffic in a square town to minimize route-crossings. Beiträge zur Theorie des Verkehrsflusses, Strassenbau und Strassenverkehrstechnik, 86, 175-183.